פרק 6 - לוגיקת הפרדיקטים

תבניות פסוק

תבניות פסוק מתארות תכונות של איברים בתחום דיון נתון - U (universe)
אם $P(x)$ תבנית פסוק מעל U ו- $a \in U$, אז $P(a)$,
המתקבלת מהתבנית ע"י הצבת a במקום x, הוא פסוק המביע טענה
<u>בעלת ערך אמת</u>. אם $P(a)$ אמת, אז a הוא בעל התכונה ש- $P(x)$
מתארת, אחרת לא.

<u>עבור קבוצת האנשים:</u>

$P(x)$: 'x אוהב בירה'

$Q(y)$: 'אבא של y מהנדס'

$R(z)$: 'תמר אחות של z'

<u>עבור קבוצת המספרים:</u>

$P(x)$: $1<x<2$ 'להיות מספר בין 1 ל-2'

$Q(x)$: $\frac{1}{x}<4$ ← לא מוגדרת ב-0

$P(x,y)$: 'x מכיר את y' $\neq P(y,x)$

$R(x,y)$: 'x נשוי ל-y'

* מה שחשוב זה הדיוק ולא האות עצמה!

פרק 6 - לוגיקת הפרדיקטים

תבניות פסוק

התת-קבוצה של תחום הדיון U, המורכבת מכל הערכים של x שעבורם $p(x)$ אמת, מכונה קבוצת האמת של $p(x)$ ב-U.

הקבוצה הזאת מסומנת: $\{x \in U : p(x)\}$.

קרי: 'קבוצת כל ה-x-ים ב-U, כך ש- $p(x)$'.

$$p(x): x^2-5x+6=0$$

$$\{x \in R : p(x)\} = \{2,3\}$$ ← קבוצת האמת

$$p(x): x^2-5x+6<0$$

חשוב להתייחס לקבוצת הדיון:

<u>בעולם המספרים R</u>: ערך האמת של $p(x)$ הוא $(2,3)$

<u>בעולם המספרים N</u>: ערך האמת של $p(x)$ הוא $\emptyset$

* האותיות x,y,z אינן מצביעות על איבר מסוים!

פרק 6 - לוגיקת הפרדיקטים

3- דף תבניות בעזרת קשרים

$P(x)$: 'x זוגי'

$Q(x)$: 'x מתחלק ב-3'

$\varphi(x): P(x) \wedge Q(x)$

x זוגי וגם מתחלק ב-3

פרק 6 - לוגיקת הפרדיקטים

כמתים

הכמת כולל

'יהא x, $\varphi(x)$'

נאמר שהוא מתקבל מ- $\varphi(x)$ על ידי כימות כולל על x.

לסימונו נשתמש בביטוי $\forall x(\varphi(x))$.

הסימן '$\forall$' הוא הסימן המקובל בלוגיקה לסימול 'כל'.

המסגרת '$\forall x(\ldots)$' מסמלת 'לכל x'.

כאן נכנסות תבניות שונות מכמתים

$\varphi(x)$: 'x גר ברחוב רוטשילד' $U=\{x:$ x תושב תל אביב$\}$

$\forall x(\varphi(x)) \leftarrow$ 'כל תושבי תל אביב גרים ברוטשילד'

זה כמובן שקר...

פרק 6 - לוגיקת הפרדיקטים

כמתים

הכמת הישי

'יש x, כך ש- $\varphi(x)$'

נאמר שהוא מתקבל מ- $\varphi(x)$ על ידי כימות ישי של x.

סימונו נעשה בביטוי $\exists x(\varphi(x))$.

הסימן '$\exists$' הוא הסימן המקובל בלוגיקה לסימול 'יש'.

המסגרת '$\exists x(\ldots)$' מסמלת 'יש x, כך ש-'.

יש מישהו ש...

כאן נכנסות תבניות שאותן מכמתים

$\varphi(x): \; 3x+3=0$ $\qquad$ $U=\mathbb{R}$

$\exists x(\varphi(x)) \leftarrow$ יש x כך ש $3x+3=0$. אמת ($x=-1$)

פרק 6 - לוגיקת הפרדיקטים

משפט 6.7 - עמוד 137

יהי $\varphi=\varphi(x,\dots)$ תבנית אשר x הוא אחד המשתנים שלה, לאו דווקא יחיד.

1. $\forall_x(\varphi)\equiv\neg\exists_x(\neg\varphi)$
2. $\neg\forall_x(\varphi)\equiv\exists_x(\neg\varphi)$
3. $\exists_x(\varphi)\equiv\neg\forall_x(\neg\varphi)$
4. $\neg\exists_x(\varphi)\equiv\forall_x(\neg\varphi)$

פרק ג - לוגיקת הפסוקים

כללי היסק וכתיב אנכי

מודוס פוננס	MP	$\dfrac{\varphi \to \psi, \varphi}{\psi}$
מודוס טולנס	MT	$\dfrac{\varphi \to \psi, \neg\psi}{\neg\varphi}$
השמטת $\wedge$	$\wedge E$	$\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} \equiv_T \dfrac{\psi \wedge \varphi}{\psi}$
הוספת $\wedge$	$\wedge I$	$\dfrac{\varphi, \psi}{\varphi \wedge \psi}$
השמטת $\vee$	$\vee E$	$\dfrac{\varphi \vee \psi, \neg\psi}{\varphi}$
הוספת $\vee$	$\vee I$	$\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}$
טרנזיטיביות	TR	$\dfrac{\varphi \to \psi, \psi \to \eta}{\varphi \to \eta}$

פרק ג - לוגיקת הפסוקים

שקילות טאוטולוגית

שם השקילות	סימון	השקילות עצמה (נוסחאות)	הערות חשובות
שלילה כפולה	DN (double no)	$\neg(\neg\varphi) \equiv_T \varphi$	
כללי החילוף		$\varphi \wedge \psi \equiv_T \psi \wedge \varphi$ $\varphi \vee \psi \equiv_T \psi \vee \varphi$	
כללי קיבוץ		$\varphi \wedge (\psi \wedge \eta) \equiv_T (\varphi \wedge \psi) \wedge \eta$ $\varphi \vee (\psi \vee \eta) \equiv_T (\varphi \vee \psi) \vee \eta$	
כללי פילוג		$\varphi \wedge (\psi \vee \eta) \equiv_T (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \eta)$ $\varphi \vee (\psi \wedge \eta) \equiv_T (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \eta)$	
כללי דה-מורגאן		$\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv_T \neg\varphi \vee \neg\psi$ $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv_T \neg\varphi \wedge \neg\psi$	
ויתור על $\rightarrow$		$\varphi \rightarrow \psi \equiv_T \neg\varphi \vee \psi \equiv_T \neg(\varphi \wedge \neg\psi)$	
היפוך	CP	$\varphi \rightarrow \psi \equiv_T \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$	
ויתור על $\leftrightarrow$		$\varphi \leftrightarrow \psi \equiv_T (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$	
שלילה של גרירה		$\neg(\varphi \rightarrow \psi) \equiv_T \varphi \wedge \neg\psi$	

פרק ג - לוגיקת הפסוקים

לוחות אמת טאוטולוגיה

או

לוח אמת של הדיסיוניקציה

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

וגם

לוח אמת של הקוניוניקציה

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

אם
אז

לוח אמת של ההתניה

φ	ψ	$\varphi \rightarrow \psi$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

לא

לוח אמת של השלילה

φ	$\neg\varphi$
T	F
F	T

אם ורק אם

לוח אמת של ההתניה הכפולה

φ	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

לוח אמת של ההתניה הכפולה

φ	ψ	$(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

קשר ה-או המוציא (xor)

φ	ψ	$(\varphi \wedge \psi) \wedge \neg(\varphi \wedge \psi)$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F