פרק 9 - מטריצות

הגדרות סימונים ופעולות

הגדרות וסימונים בסיסיים

9.1 עמוד 131

מטריצה מסדר $m\times n$ היא מבנה של סקלרים, שבו יש m שורות ו-n עמודות.
נסמן באותיות לועזיות גדולות A,B,C,D.

$$A_{2\times3}=\begin{pmatrix}2 & 6 & \sqrt{3}\\ 1 & 0 & -4\end{pmatrix} \qquad B_{4\times2}=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 9 & 10\\ 0 & 3\\ -1 & -8\end{pmatrix}$$

חיבור מטריצות וכפל מטריצה בסקלר - עמוד 134-135

* חיבור שתי מטריצות מוגדר רק כאשר שתיהן מאותו סדר.
כלומר לשתיהן אותו מספר שורות + אותו מספר עמודות.

* מכפלה של מטריצה בסקלר מוגדרת לכל מטריצה A, ולכל סקלר $t\in\mathbb{R}$.

* שתי הפעולות מוגדרות רכיב-רכיב.

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 6\\ 5 & 7\end{pmatrix}$$

$$3\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot1 & 3\cdot2\\ 3\cdot5 & 3\cdot6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 15 & 18\end{pmatrix}$$

פרק 9 - מטריצות

הגדרות סימונים ופעולות

חיבור מטריצות וכפל מטריצה בסקלר - 9.2 עמוד 136

א. תכונות החיבור של מטריצות:

1. סגירות — סכום של מטריצות הוא מטריצה
2. קיבוציות — $(A+B)+C=A+(B+C)$
3. חילופיות — $A+B=B+A$
4. קיום איבר נייטרלי — $A+0=A$
5. קיום איברים נגדיים — $A+(-A)=0$

ב. תכונות הכפל בסקלר

6. סגירות — מכפלה בסקלר של מטריצה היא מטריצה.
7. קיבוציות — $s(tA)=(st)A$ $\quad 5(3A)=15\cdot A$
8. כפל ב-1 — $1A=A$

ג. חוק הפילוג

9. פילוג ביחס לחיבור מספרים — $(s+t)A=sA+tA$
10. פילוג ביחס לחיבור מטריצות — $t(A+B)=tA+tB$

פרק 9 – מטריצות

הגדרות סימונים ופעולות

מכפלת מטריצות

נתונות המטריצות A,B.

המכפלה AB מוגדרת כאשר:

מספר העמודות של A = מספר השורות של B

$$A_{m\times n}\cdot B_{p\times q}=C_{m\times q}$$

תנאי הכרחי

$n=p$

תכונות הכפל

משפט 9.6 עמוד 147

1. $t(AB)=(tA)B=A(tB)$
2. $A(BC)=(AB)C$
3. $A(B+C)=AB+AC$
4. $(B+C)A=BA+CA$

פרק 9 - מטריצות

הגדרות סימונים ומשמעות

מכפלת מטריצות

$$A_{m\times n}\cdot B_{p\times q}=C_{m\times q}$$

תנאי הכפלה:
$n=p$

1. $AB\neq BA$!

2. אם $A\cdot B=0$ אז לא בהכרח A או B הן 0 !

פרק 9 - מטריצות

הגדרות סימונים ופעולות

כפל במטריצת אפס

$$A_{m\times k}\cdot 0_{k\times n}=0_{m\times n}$$

$$0_{n\times m}\cdot A_{m\times k}=0_{n\times k}$$

מטריצת היחידה

מטריצה ריבועית מסדר n אשר איברי האלכסון הראשי שלה שווים ל-1 ואשר שאר איבריה הם אפס נקראת מטריצת היחידה מסדר n וסימונה I או I_n.

חובה $n\times n$

$$I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\qquad I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

I היא סוג של "1" בעולם של מטריצות...

$$\boxed{\begin{aligned}A\cdot I&=A\\I\cdot A&=A\end{aligned}}$$

עוד חוקים...

$$A^0=I$$
$$A^1=IA=A$$
$$A^2=AA$$
$$A^3=A^2A=A\cdot A\cdot A$$

פרק 9 - מטריצות

המטריצה המשוחלפת

תהי A מטריצה מסדר $m\times n$.
המטריצה המשוחלפת של A (transposed), שסימנה A^t,
היא מטריצה מסדר $n\times m$, שבה האיבר ה-(i,j) שלה
הוא האיבר ה-(j,i) של A.

בתכלס - הופכים שורות לעמודות!

דוגמא:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix} \qquad A^t=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 4 & 6\end{pmatrix}$$

$3\times 2 \qquad 2\times 3$

משפט 9.15

$$(A^t)^t=A$$
$$(sA)^t=sA^t$$
$$(A\pm B)^t=A^t\pm B^t$$

$$(AB)^t=B^tA^t$$
$$(A^k)^t=(A^t)^k$$

פרק 9 - מטריצות

מטריצה סימטרית

מטריצה נקראת סימטרית אם ורק אם $A^t=A$.

סימטרית ביחס לאלכסון הראשי שלה

$$A=\begin{pmatrix}3&1\\1&5\end{pmatrix} \qquad A^t=\begin{pmatrix}3&1\\1&5\end{pmatrix}$$

מטריצה אנטי סימטרית

אם B אנטי סימטרית אז:

$B^t=-B$ או $-B^t=B$

פרק 9 - מטריצות

מטריצות הפיכות

הגדרה ותכונות בסיסיות

מספר הופכי הוא מספר שיש מספר אחר שהמכפלה ביניהם היא 1.

מטריצה הופכית היא מטריצה שיש מטריצה אחרת שהמכפלה ביניהן היא I.

הגדרה 9.17

מטריצה ריבועית A נקראת הפיכה או רגולרית אם ורק אם קיימת מטריצה B שעבורה:

רק ריבועיות אגב!

$$\boxed{AB=BA=I}$$

במצב כזה B נקראת הופכית ל-A.

מטריצה שאינה הפיכה נקראת אי הפיכה או סינגולרית.

אם A הפיכה אז נסמן את ההופכית ב-A^{-1} חשוב!

ואז A^{-1} היא ההופכית היחידה שקיימת.

אם A הפיכה אז $A^{-1}\cdot A=I$ וגם $A\cdot A^{-1}=I$

אם A לא הפיכה אז אסור לכתוב A^{-1} חשוב!

פרק 9 – מטריצות

מטריצות הפיכות

בדיקת הפיכות של מטריצה

האם מטריצה נתונה הפיכה או לא? זו השאלה...

1. נקבל מטריצה ריבועית $n \times n$ ונרצה לבדוק אם היא הפיכה או לא

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. נצמיד אליה מטריצת יחידה מאותו הסדר

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

3. נדרג את השמאלית למדורג, בצד שמאל, לקנונית ! (I)

אם הגענו לקנונית (I)

$(I \mid A^{-1})$

1. A הפיכה !
2. מצאנו את A^{-1}

אם לא הגענו לקנונית

A לא הפיכה !

פרק 9 - מטריצות

משפטים 9.20+9.21+9.22 - עמודים 173-175

משפט 9.20 - כלל הצמצום

יהי A מטריצה (ריבועית) הפיכה, ותהיינה B,C מטריצות.

1. אם המכפלות AB ו- AC מוגדרות, ואם $AB=AC$, אז $B=C$.
2. אם המכפלות BA ו- CA מוגדרות, ואם $BA=CA$, אז $B=C$.

משפט 9.21

1. אם A הפיכה, אז A^{-1} הפיכה, ומתקיים $(A^{-1})^{-1}=A$
2. אם A הפיכה, אז A^t הפיכה, ומתקיים $(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$
3. אם A ו-B הן מטריצות הפיכות מאותו סדר, אז המכפלה AB הפיכה ומתקיים $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$
4. אם A הפיכה, אז לכל $k\geq 0$ המטריצה A^k הפיכה.

   ומתקיים $(A^k)^{-1}=(A^{-1})^k$

משפט 9.22

תהיינה A ו-B מטריצות ריבועיות מסדר n.
אם $AB=I$, אז A ו-B הפיכות, וכל אחת מהן היא ההופכית של האחרת, כלומר $B=A^{-1}$ ו- $A=B^{-1}$.

פרק ט - דטרמיננטות

הגדרת הדטרמיננטה

דטרמיננטה היא פונקציה שמקבלת מטריצה ריבועית ומחזירה מספר.

סימונים:

$\det(A)$ או $|A|$

עבור $A_{2\times2}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$$

מכפלת האלכסון הראשי מינוס מכפלת האלכסון המשני.

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow |B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot5-1\cdot3 = \underline{\underline{7}}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot3-(-2\cdot4) = 3+8 = \underline{\underline{11}}$$

פרק 10 - דטרמיננטות

דרוג

השפעת פעולות אלמנטריות על הדטרמיננטה - משפט 10.6 - תכלס

3 פעולות אלמנטריות שמותרות במטריצות מותרות גם בדטרמיננטות?

אבל עם מספר תשלומים?

1. בהחלפת שורות/עמודות כופלים את הדטרמיננטה ב- -1.

פיצוי

2. בכפל שורה בסקלר $t\neq 0$ כופלים את הדטרמיננטה בהופכי של הסקלר.
3. בהוספת כפולה של שורה/עמודה לשורה אחרת הדטרמיננטה ללא שינוי.

סעיף ב מבלבל

משפט 10.6 - עמוד 204

תהי A מטריצה ריבועית, ותהי φ פעולה אלמנטרית על השורות (או על העמודות) של A.

1. אם φ היא החלפת שני שורות (או שני עמודות) זו בזו, אז: $|\varphi(A)| = -|A|$
2. אם φ היא כפל שורה (או עמודה) בסקלר $t\neq 0$, אז: $|\varphi(A)| = t|A|$
3. אם φ היא הוספת כפולה של שורה (עמודה) לשורה (עמודה) אחרת, אז: $|\varphi(A)| = |A|$

פרק ט - דטרמיננטות

דטרמיננטה של מטריצה משולשית

$$A=\begin{pmatrix} \ddots & ? \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}$$

מטריצה ריבועית מכונה **משולשית עליונה**
אם כל איברים שמתחת לאלכסון הראשי הם אפסים.

$$A=\begin{pmatrix} \ddots & 0 \\ ? & \ddots \end{pmatrix}$$

מטריצה ריבועית מכונה **משולשית תחתונה**
אם כל איברים שמעל לאלכסון הראשי הם אפסים.

דטרמיננטה של מטריצה משולשית היא מכפלת האלכסון

$$A=\begin{pmatrix} \alpha_1 & & ? & \\ & \alpha_2 & & \\ 0 & & \alpha_3 & \\ & & & \alpha_4 \end{pmatrix} \longrightarrow |A| = \alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\alpha_3\cdot\alpha_4$$

$$A=\begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 & \\ & \alpha_2 & & \\ ? & & \alpha_3 & \\ & & & \alpha_4 \end{pmatrix} \longrightarrow |A| = \alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\alpha_3\cdot\alpha_4$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \\ 1 & 7 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 1\cdot 6\cdot 9 \quad \underline{\underline{54}}$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 2\cdot 3\cdot 4 = \underline{\underline{24}}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = \underline{\underline{12}}$$

פרק 9 - מטריצות

חוקי דטרמיננטות

משפט 10.5 - עמוד 198

לכל מטריצה ריבועית A $|A^t|=|A|$

משפט 10.8 - משפט המכפלה - עמוד 209

$$|AB|=|A|\cdot|B|$$

לכל A ריבועית ולכל $n\ge1$ $|A^n|=|A|^n$

מותר להוציא מספר אבל מעלים אותו בחזקת סדר המטריצה!

$$|aA|=(a)^n|A|$$

עמוד 211

כאשר A הפיכה אנו יודעים ש $AA^{-1}=I$
מאחר ו- $|I|=1$ ודטרמיננטת המכפלה היא מכפלת הדטרמיננטות,
מתקיים: $|A||A^{-1}|=1$. אם כן,

אם A מטריצה ריבועית והפיכה אז $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$

פרק 10 - דטרמיננטות

קשר בין הפיכות לדטרמיננטה חשוב!

משפט 10.9

A ריבועית היא רגולרית (הפיכה) אם ורק אם $|A|\neq 0$

A ריבועית היא סינגולרית (אי-הפיכה) אם ורק אם $|A|=0$

סעיף 4 לא בחומר

פרק 9 - מטריצות

משפט 9.23

תהי A מטריצה ריבועית מסדר n.
כל הטענות שלהלן שקולות:

נשים לב שהכל עובד
גם הפוך!

1. A הפיכה
2. קיימת מטריצה (ריבועית מסדר n) B שמקיימת $AB=I$.
3. קיימת מטריצה (ריבועית מסדר n) B שמקיימת $BA=I$.
5. קבוצת העמודות של A היא בסיס של R^n.
6. קבוצת העמודות של A היא קבוצה בלתי תלויה לינארית ב-R^n.
7. קבוצת העמודות של A פורשת את R^n.
8. A^t הפיכה.
9. קבוצת השורות של A היא בסיס של R^n.
10. קבוצת השורות של A היא קבוצה בלתי תלויה לינארית ב-R^n.
11. קבוצת השורות של A פורשת את R^n.
12. לכל $\underline{b}\in R^n$ יש פתרון יחיד למשוואה המטריציונית $A\underline{x}=\underline{b}$
13. לכל $\underline{b}\in R^n$ יש פתרון למשוואה המטריציונית $A\underline{x}=\underline{b}$
14. הפתרון הטריוויאלי הוא הפתרון היחיד של המשוואה המטריציונית $A\underline{x}=\underline{0}$.
15. A שקולת שורות ל-I
16. במדורגת שקולת שורות ל-A אין שורות אפסים.

פרק ט - דטרמיננטות

דרכים לבדיקת הפיכות של מטריצה

1. דירוג מול מטריצה יחידה
2. משפט $AB=I$
3. משפט 10.9 $|A|\neq 0$
4. משפט 9.23