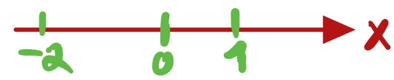
# פרק 8 - מרחבים לינאריים

## מרחבים לינאריים - הסבר

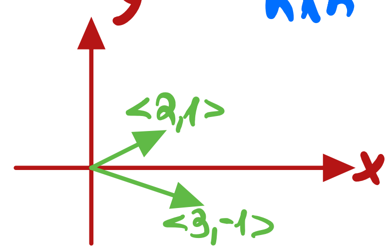
### המרחב $R$




הציר הממשי

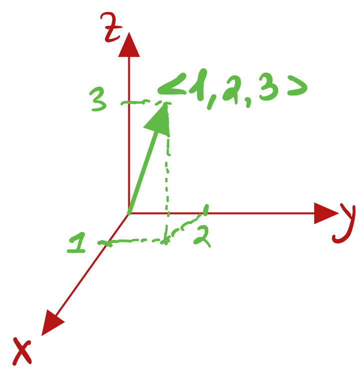
### המרחב $R^2$

$R \times R$




המישור

### המרחב $R^3$




המרחב התלת מימדי

מהו $R^4$ ? $R^5$ ? $R^8$ ?

כל חץ ירוק יקרא "וקטור" ומטבעו הוא תמיד ייצא מראשית הצירים עד שיפגע בנקודה הרצויה.

הסימון הכללי של מרחב לינארי יהיה $R^n$.

ב-$R^2$ יש 2 קואורדינטות — $\langle x_1, x_2 \rangle$ ← וקטור

ב-$R^3$ יש 3 קואורדינטות — $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ ← וקטור

ב-$R^n$ יש n קואורדינטות — $\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \dots x_n \rangle$ ← וקטור

מותר לרשום גם כעמודה.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

# פרק 8 - מרחבים לינאריים

## וקטורים

### סימנים

נסמן באותיות קטנות מודגשות - $\underline{q}, \underline{p}, \underline{u}, \underline{v}, \underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$

$\underline{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$

$\underline{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \ldots v_n \rangle$

### וקטור ה-0

סימן: $\underline{0}$

$\underline{0} = \langle 0,0,0 \rangle \neq \langle 0,0,0,0 \rangle$

### פעולות וקטורים

מותר לחבר/לחסר רק וקטורים שווי ממד

**חיבור וקטורים - הגדרה 8.1 עמוד 69**

מחברים "רכיב-רכיב"

$\underline{v} = \langle 3,5 \rangle, \quad \underline{u} = \langle 1,4 \rangle \qquad \underline{v}+\underline{u} = \langle 4,9 \rangle$

**חיסור וקטורים - הגדרה 8.3 עמוד 72**

מחסרים "רכיב-רכיב"

$\underline{v} = \langle 3,5 \rangle, \quad \underline{u} = \langle 1,4 \rangle \qquad \underline{v}-\underline{u} = \langle 2,1 \rangle$

**כפל וקטור בסקלר - הגדרה 8.4 עמוד 72**

סקלר=מספר=פרמטר

$t=2 \qquad \underline{a} = \langle 3,4 \rangle$

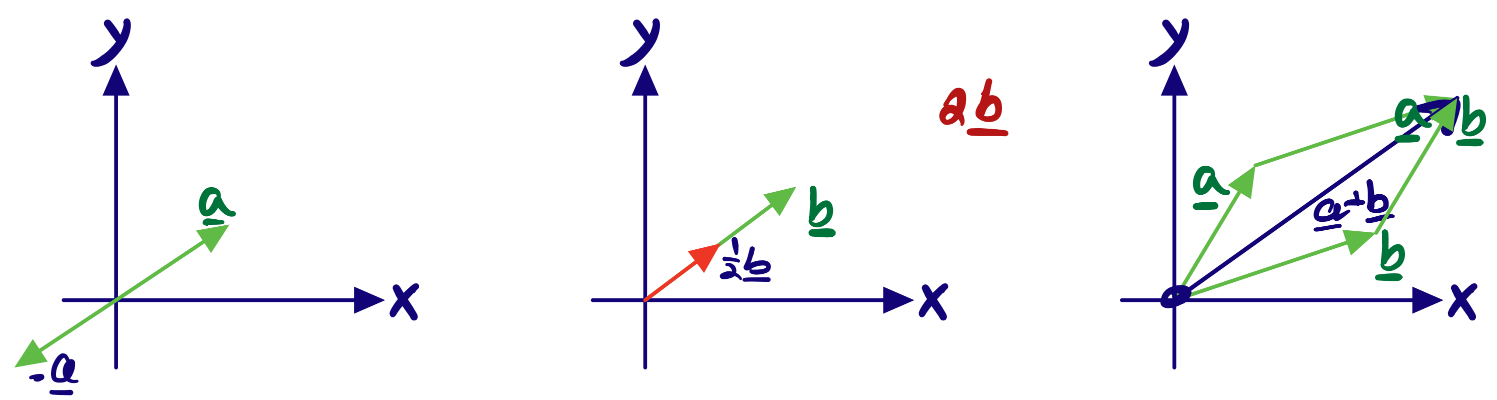
$t\underline{a} = 2\langle 3,4 \rangle = \langle 2\cdot 3, 2\cdot 4 \rangle = \langle 6,8 \rangle$

שימו לב מסמנים וקטורים בקורס שלנו

# פרק 8 – מרחבים לינאריים

## וקטורים

### המחשה גיאומטרית - עמוד 74




חיבור וקטורים "כלל המקבילית"

הכפלה בסקלר חיובי גבוה או קטן מ-1

הכפלה בסקלר שלילי גבוה או קטן מ-1

---

זו ההגדרה החשובה ביותר...

## צירופים לינאריים, פרישה ואי תלות

הגדרה 8.13 עמוד 88

יהי $V$ מרחב לינארי מעל $\mathbb{R}$.

סכום מהצורה $t_1\underline{v}_1+t_2\underline{v}_2+\dots+t_k\underline{v}_k$

שבו $\underline{v}_1\dots\underline{v}_k$ הם וקטורים ו- $t_1\dots t_k$ הם סקלרים,

מכונה צירוף לינארי של $\underline{v}_1\dots\underline{v}_k$. הסקלרים $t_1\dots t_k$ מכונים מקדמי הצירוף.

---

מסקנה: נתונים וקטורים ומספרים.

אנחנו יוצרים קומבינציה כלשהי ביניהם. תרגיל חשבוני ביניהם,

וזהו "הצירוף הלינארי". (קומבינציה לינארית)

# פרק 8 - מרחבים לינאריים

## צירופים לינאריים, פרישה ואי תלות

**משפט 7.5 עמוד 95**

יהיו $\underline{a}_1 \dots \underline{a}_k$ וקטורים וגם $b$ וקטור.

1. $\underline{b}$ ניתן להצגה כצירוף לינארי של $\underline{a}_1 \dots \underline{a}_k$ אם ורק אם למערכת אחת, אשר מטריצת המקדמים שלה היא

$$\left[\begin{array}{c:c:c:c} \underline{a}_1 & \dots & \underline{a}_k & \underline{b} \end{array}\right]$$

יש פתרון.

2. $t_1\underline{a}_1+\dots+t_k\underline{a}_k=\underline{b}$ אם ורק אם $\langle t_1,t_2\dots t_k\rangle$ פותר את המערכת הלינארית אשר מטריצת המקדמים שלה היא

$$\left[\begin{array}{c:c:c:c} \underline{a}_1 & \dots & \underline{a}_k & \underline{b} \end{array}\right]$$

---

**בתכלס:**

בתרגיל של צירוף לינארי נבנה ישירות את הוקטורים המאונכים בתוך מטריצה ונדרג.

+ אם יש פתרון יחיד או אינסוף פתרונות אז נגיד שיש צירוף לינארי מתאים.
+ אם קיבלנו סתירה אז נגיד שאין צירוף לינארי מתאים.

# פרק 8 - מרחבים לינאריים

## צירופים לינאריים, פרישה ואי תלות

### תלות לינארית - הגדרה 8.19 עמוד 101

יהי $\underline{V}$ מרחב לינארי מעל $\mathbb{R}$ ויהי $\{\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_k\}$ קבוצת וקטורים.

הקבוצה $\{\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_k\}$ **תלויה לינארית** אם ורק אם לוקטור האפס יש צירוף לינארי לא טריוויאלי של איבריה (כלומר כאשר אחד ממקדמיו שונה מ-0)

הקבוצה $\{\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_k\}$ **בלתי תלויה לינארית** אם ורק אם הצגה יחידה של וקטור האפס כצירוף לינארי של $\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_k$ היא ההצגה הטריוויאלית

כלומר אם ורק אם

$$t_1\underline{v}_1+\dots+t_k\underline{v}_k=\underline{0} \rightarrow t_1=\dots=t_k=0$$

# פרק 8 - מרחבים לינאריים

## צירופים לינאריים, פרישה ותלות

**משפט 8.20**

יהי $\{\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_k\}$ קבוצת וקטורים.

1. אם $\underline{0} \in \{\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_k\}$ (וקטור) אז $\{\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_k\}$ תלויה לינארית.

2. אם $\{\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_k\}$ תלויה לינארית אז כל קבוצה סופית שמכילה את $\{\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_k\}$ תלויה לינארית.

3. קבוצה סופית בת שני וקטורים או יותר היא תלויה לינארית אם ורק אם יש בין איבריה וקטור שהוא צירוף לינארי של היתר.

# פרק 8 - מרחבים לינאריים

## צירופים לינאריים, פרישה ותתי תלות

תת מרחב נפרש - הגדרה 8.17 עמוד 96

יהי $k$ ($k\geq 1$) וקטורים $v_1, \dots, v_k$ מתוך $V$. התת מרחב של $V$,
המורכב מכל הצירופים הלינאריים של $v_1, \dots, v_k$, מכונה התת מרחב הנפרש
ע"י $v_1, \dots, v_k$, ונהוג לסמנו $span\{v_1, \dots, v_k\}$. או $sp$.
על קבוצת הוקטורים ואומרים שהיא פורשת את התת מרחב $span\{v_1, \dots, v_k\}$.

---

בתכלס: נתונה קבוצת וקטורים: $\{v_1 \dots v_k\}$
כשאנחנו כותבים $span\{v_1 \dots v_k\}$ הכוונה היא:

אוסף כל הוקטורים האפשריים שהם צירוף לינארי של $v_1 \dots v_k$

- לוקחים את הוקטורים הנתונים
- בונים את כל הצירופים הלינאריים שלהם
- מכניסים אותם לתוך סל
- הסל הזה נקרא $span\{\text{הוקטורים}\}$

אם $u_3 = 2v_1 - 4v_5$ אז $u_3 \in span\{v_1 \dots v_k\}$

# פרק 8- מרחבים לינאריים

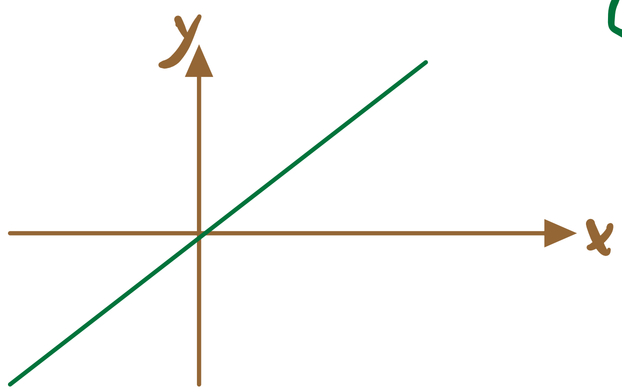
## צירופים לינאריים, פרישה ותלות

**הגדרה:** נתונה קבוצת וקטורים: $\{v_1 \ldots v_k\}$

כשאנחנו כותבים $span\{v_1 \ldots v_k\}$ הכוונה היא:

$\boxed{\text{אוסף כל הוקטורים המתקבלים שהם צירוף לינארי של } v_1 \ldots v_k}$

$span\{v_1 \ldots v_k\} = \left\{ \begin{array}{c} v_1 \ldots v_k \text{ הוקטורים} \\ \text{עם הצירופים הלינאריים} \\ \text{שניתן לייצר מהם} \end{array} \right\}$

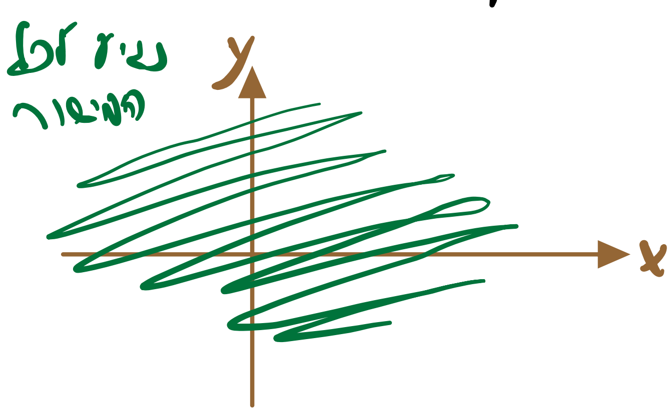



**דוגמא 1:** נתון הוקטור $v=\langle 1,1 \rangle$

מהו $span(v)$?

**דוגמא 2:** נתונים הוקטורים $u_2=\langle 0,1 \rangle$ $u_1=\langle 1,0 \rangle$

מהו $sp\{u_1,u_2\}$?



# פרק 8 - מרחבים לינאריים

## צירופים לינאריים, פרישה ואי תלות

### יחסי גומלין בין וקטור ל-span

אם $\underline{v} \in span\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ אז $\underline{v} = \alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \alpha_3\underline{v}_3$

אם $\underline{w} = \underline{v}_1 - 3\underline{v}_2 + 8\underline{v}_3$ אז $\underline{w} \in span\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$

אם אני שייך ל-span אז אני צירוף לינארי

# פרק 8 - מרחבים לינאריים

## צירופים לינאריים, פרישה ואי תלות

### שאלה 8.23 עמוד 100

נתונה קבוצה $\{v_1,\dots v_k\}$ בת שני וקטורים או יותר.
אם אחד מהוקטורים הוא צירוף לינארי של היתר אז אפשר להשמיט אותו מהקבוצה בלי שישתנה המרחב שהיא פורשת.

$$span\{v_1,\dots v_k\} = span\{v_1,\dots v_{k-1}\}$$

$$span\{<2,0>,<0,2>,\cancel{<0,4>}\} = span\{<2,0>,<0,2>\}$$

---

### שאלה 8.30 עמוד 1.11 חשוב!

יהי $V$ מרחב לינארי, ונניח של-$V$ יש בסיס בן $n$ איברים אז:

א. במרחב $V$ - קבוצת וקטורים בנות יותר מ-$n$ איברים הן ת"ל.

ב. במרחב $V$ - קבוצת וקטורים בנות פחות מ-$n$ איברים אינן פורשות את $V$

ג. במרחב $V$ - קבוצת וקטורים בת $n$ איברים פורשת את $V$ אם ורק אם היא בת"ל.

$$A=\{\underline{u}_1,\underline{u}_2,\underline{u}_3,\underline{u}_4,\underline{u}_5\} \subseteq R^4$$

---

# פרק 8 - מרחבים לינאריים

## צירופים לינאריים, פרישה ותלות

נתונה הקבוצה $A=\{v_1,\dots v_m\}$ מהמרחב $R^n$. $m,n$ לא ידועים.

האם $v_1,\dots v_m$ פורשת את $R^n$?

3 מקרים אפשריים:

1. $m<n$ ← "אין מספיק וקטורים". $A$ לא פורשת את $R^n$.
   * "חסרים וקטורים לכל ציר"
2. $m=n$ (הקבוצה יש בדיוק $n$ וקטורים)

בסיס - הגדרה 8.26 עמוד 110

יהי $V$ מרחב לינארי מעל $R$ ותהי $B=\{v_1,\dots v_k\}$ קבוצת וקטורים. $B$ היא בסיס של $V$ אם ורק אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

1. $B$ פורשת את $V$ כלומר $V=\operatorname{span}B=\operatorname{span}\{v_1,\dots v_k\}$
2. $B$ בלתי תלויה לינארית.

3. $m>n$
   יש יותר מדי וקטורים! (יותר מ-$n$)
   * הקבוצה לא בסיס.
   * הקבוצה תלויה לינארית = לא פורשים בהכל. (8.30)

# פרק 8 - מרחבים לינאריים

## צירופים לינאריים, פרישה ותלות

**מסקנה 8.29 עמוד 112** **חשוב!**

לכל $1 \le n$ טבעי,

1. למרחב $R^n$ יש בסיס בן n איברים.
2. בכל בסיס של $R^n$ יש n איברים.
3. קבוצה בת n וקטורים היא בסיס של $R^n$ אם ורק אם היא פורשת את $R^n$.
4. קבוצה בת n וקטורים היא בסיס של $R^n$ אם ורק אם היא בת"ל.
5. קבוצה $B \subseteq R^n$ היא בסיס של $R^n$ אם ורק אם לכל וקטור ב-$R^n$ יש הצגה יחידה כצירוף לינארי של איברי B.

**בסיס ל-$R^n$ מכיל בדיוק n וקטורים + בת"ל**

---

מקבלים קבוצה בעלת m וקטורים במרחב $R^n$ כאשר $m=n$ ← מבצעים: מוכיחים שהקבוצה בת"ל ← (לפי מש. 8.29 4) הקבוצה היא בסיס של $R^n$ ← (לפי מש. 8.29 3) הקבוצה פורשת את $R^n$