

פרק 7 - מערכות אינאריות

מערכות של קווים ישרים

מערכת אינארית - המצבה 7.1 עמוד 10

קבוצת משוואות, המורכבת מ-n משוואות אינאריות מ-n משתנים, מכונה מערכת אינארית חגמה ("מזל ח").

"2 משוואות ב-2 משתנים"

$$\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 3x - 5y = -14 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} \text{נדמים} \\ \text{לשוואות} \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ \times \\ 2 \end{matrix}$$

בואונו:

$$\begin{cases} 2x = 4y + 10 \\ 5x - 8z = 0 \\ 7y = 5 - 2z \end{cases} \rightarrow 3 \times 3$$

$$\begin{cases} x + y + z = 8 \\ x - 2y = 6z - 1 \end{cases} \rightarrow 2 \times 3$$

פרק 7 - מערכות ליניאריות

מערכת ליניארית - המצבה 7.1 עבור n משוואות ליניאריות, המכילות n משתנים ליניאריים.
 ב- n משתנים, המונה המכיל מערכת ליניארית (מ"ר ל"א").

הפרק הזה משוג אכני?

נאם בו כמה המצבות הפשוטות? שחשוב להכיר...
 מעבר לזה? ע"א יורד המצבה סליבית.

עודדים לך אכני לפתור מערכת ליניארית אחת.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

מערכת ליניארית

הצגה סטנדרטית

"הרבה" משוואות...
 "הרבה" משתנים...
 "מאריזת אחת"

שגור המשתנים: x עם אינדיקס
 השגור ע"א באגור משוואות...

מאריזת המקבילים

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

זה כביכול סימן ה- "="

מטריצת מקדמים מצומצמת

עמודות האיברים החופשיים

פרק 7 - מערכות משוואות

מערכות משוואות - תרגיל 7.2

א- יהי סגורה $\langle a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \rangle$ היא מערכת משוואות וינארו אגמא
 אם ורק אם $\langle a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \rangle$ פותרת כל אחת מהמשוואות המרכיבות.

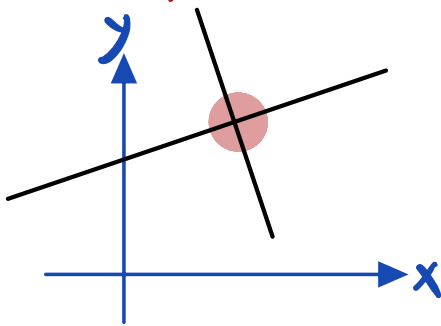
בגזירה ציינים ב- \mathbb{R}^2 אנו רואים מערכת (קו).

$$\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 3x - 5y = -14 \end{cases}$$

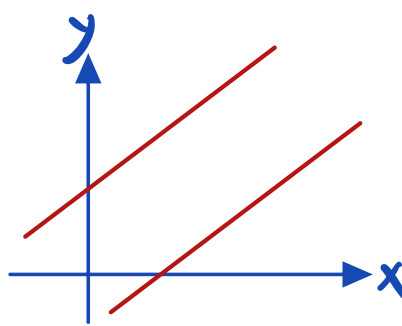
מערכת: (4, 2)

נחליפים משוואות
 $\rightarrow a \times a$

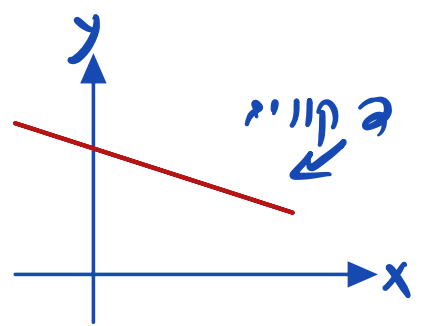
מערכת 1



אין פתרונות



אינסוף פתרונות



כסבויים אפירי נערכו לנארו, יש 3 אפשרויות:

- 1. מערכת אחת יחיד
- 2. אין מערכת
- 3. יש אינסוף פתרונות

פרק 7 - מערכות לינאריות

מתיזה - הקצרה 7.6 עמ' 21

מתיזה מסביר מאיפה היא נובעת, אבל יש לה שורש אחד חשוב.

נקודת המוצא כזו:

מערכת לינארית

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

חשוב שכן "תכלס"

וניצור מבנה של מתיזה כזו:

"מתיזה" מקבוצת

$$\left[\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

מטריצת מקדמים מצומצמת עמודות האיברים החופשיים

כל עמודה מייצגת משתנה אחר

פרק 7 - מערכות לינאריות

מערכת לינארית

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

נקודת מוצא כזו:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

מטריצת מקדמים מצומצמת
עמודת האיברים החופשיים

ניצור מערך של מערכות כזו:

לדג דהן המערכות אינן מותוות או המערכת לא תמיד

האם יש לה? היא למעשה מותוות משוואות, נכונים?

בעזרת אלגוריתם - המורה 7.8 עמוד 23

בעזרת - שורה אלמנטריות על מערכת היא אחת מהפעולות האלה:

- החלפת שתי שורות של המערכת זו בזו
- כפל אחת השורות של המערכת במספר שונה מ-1. "גירוף"
- הוספת ^{לשתי} כפולה של אחת השורות למערכת שורה אחת שלה

אם יש צורך ביצירת קבוצת חוקיות, המערכת מתגבשה בעקבותיה "שקולת שורות".

פרק 7 - מצב זינארי

איבר פותר - המרה 7.10 זוג 33

כסורה של מריצה, שזנה בורה של אפסים, האיבר הראשון בסורה נ-0
מכונה האיבר הפותר של הסורה. נקרא גם איבר מפתח.

חבלים: מתבטאים על כל שורה בפברג, למשל זינאן.
האיבר הראשון בסורה נ-0 הוא האיבר הפותר.

מריצת מוגדלות - המרה 7.12 זוג 34

מריצת מוגדלות היא מריצה הסונה על המריצות האלה:

1. שורות האפסים מופיעות מתח על הסורות שאינן שורות אפסים.

2. כל שתי שורות שאינן שורות אפסים, האיבר הפותר של הסורה
התחתונה יותר מופיע זינאן לאיבר הפותר של הסורה הגבוהה יותר.

חבלים: כל שורה שיש בה פותר הוא זינאן פותר מוגדל.

פרק 7 - מצב ינארו

מטרים קטרים וחופיים - פתרון 7.14 זוג סה

תבי נתנה מצב ינארו - אשר מצב המקדים שלה היא מצב ינארו קטרי. (מתחילתו לא צריך קטרי, רק מצב ינארו)

המטרים אשר המקדים שלהם הם איברים פיתום, מכונים המטרים הקטרים של המצב.
שאר המטרים של המצב מכונים מטרים חופיים.

המבט:

מצב קטרי - מצב שבו המטרים פיתום.

מצב חופי - מצב שאין בו קטרי.

פרק 7 - מערכות ייחודיות

אפשרויות בונות - למען המערכת - משלב 7.15 עד 2 41

תפיסתית נעזרת על מערכת ייחודיות אחת אשר מייצגת התקבולים שלה
היא מייצגת מערכות קבוליות. מערכת אחת קבולית

1. אם יש במערכת שורה, אשר האינדקס שלה הוא $[0 \dots 0 \ 1]$
במובן התקבולים המובנים (כלומר שורה לאיבוס $[0 \dots 0 \ 1]$)
אז מערכת אין בתרון. זו שורה "מיוחדת".

2. אם אין במערכת שורה לאיבוס $[0 \dots 0 \ 1]$,
אז מערכת יש בתרון.

בדיקה זרימה -

אם במערכת אין מערכת חופשית קבולית אז מערכת יש בתרון יחיד
אז במערכת יש מערכת חופשית קבולית אז מערכת יש בתרון יחיד

$$\langle x_1, x_2 \dots x_n \rangle = \langle c_1, c_2 \dots c_n \rangle$$

אם במערכת יש מערכת חופשית קבולית אז מערכת יש בתרון יחיד.
אז במערכת יש מערכת חופשית קבולית אז מערכת יש בתרון יחיד.

פרק 7 - מערכות יינאריות

אפשרויות סגורות לפתרון מערכת - משפט 7.15 עמ' 41

תהליך הפתרון:

- * וקטורים מזרזים משוואות לפתרון
- * מציגים אותם בתור מטריצה
- * "מבראים" את המטריצה לפי גאוס ומניחים למטריצה גבוהות

אחרי בהגשן למטריצה מבראים: (במקרה של פואונטיר)
 (הואונומיה, נהוג, כהמשך)

1. אם יש מטריצה שורה $(\begin{matrix} \text{אסר} \\ \text{צורה} \\ \text{ל-0} \end{matrix} \mid 0 \dots 0 \ 0)$ אז מערכת אין פתרון.

2. אם אין מטריצה שורה $(\begin{matrix} \text{אסר} \\ \text{צורה} \\ \text{ל-0} \end{matrix} \mid 0 \dots 0 \ 0)$ אז:

- * אם כל השתנים קשורים יש פתרון יחיד
- * אם יש השתנה חופשי אחד לפחות יש אינסוף פתרונות

פרק 7 - מערכות יחסיות

אפשרויות בונות לפיתרון מערכת - משפט 7.15 עמוד 41

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

מאייצת המגדלות בקיבלנו היאם
 כלם קצורים ואין שורה סגורה
 טק ים פיתרון יחיד אפשרי.

סעיף 1- תחילת האזור

שאלה 2 - מאיכים זברה ל"קנונית"

מרוצת מגדלות קנונית - האגרה 7.13 עמוד 38

מרוצת מגדלות קנונית היא מרוצת הסוגה של הבדלים האלה:

1. שורות האפסים מופיעות מתחת לכל השורות שאינן שורות אפסים.
2. כל שתי שורות שאינן שורות אפסים, האיבר הפותח של השורה הנמוכה יותר מופיע למין האיבר הפותח של השורה הגבוהה יותר.
3. כל שורה שאינה שורה אפסים, האיבר הפותח שלה הוא ל-1.
4. כל עמודה שבה מופיע איבר פותח ל יותר הופכים הם אפסים.

פרק 7 - מערכות ליניאריות

מערכת ליניארית הומוגנית - 7.4 עמ' 53

מערכת ליניארית הומוגנית נחזית כג:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned} \right\} \text{כל אלה אפסים}$$

שימו לב - הפתרון $> 0 \dots 0$ תמיד יפתור את המשוואה!
 היא נקראת הפתרון "טריווילי".

פתרון יחיד
 או
 אינסוף פתרונות

* למערכת הומוגנית תמיד יש פתרון:

לעמ' 7.18 עמ' 54

- * אם Δ המספרים קטורים יש פתרון יחיד $\leftarrow < 0 \dots 0 >$ טריווילי
- * אם יש שיתנה חופשי אחד לפחות יש אינסוף פתרונות.