פרק 19 – מד"ר – משוואות דיפרנציאליות רגילות

היכרות עם הנושא

משוואה דיפרנציאלית רגילה היא משוואה שבה מוצג קשר בין הפונקציה $y(x)$ ובין הנגזרות שלה כגון y' , y'' וכו'.
המשוואה מתארת מודל במדעי הטבע.(תנודות מטוטלת, תנודות חלקיק של אטום, התרבות זחלים, יחסי טורף-נטרף)

דוגמאות של מד"ר :

$$y + y' + y'' = 5$$

$$y'' - y' + 8 = 0$$

$$\frac{1}{1 + y'} = 0$$

"פתרון של המד"ר" הוא פונקציה y שתקיים את המד"ר.

דוגמאות :

$y = y'$ $\qquad$ $y = x^2$ או $y = 3e^x$

יכולים להיות פתרונות שונים. לדוגמא עבור המשוואה $y' = 2$ הפתרונות הם :

$$y = 2x + 10 \quad and \quad y = 2x - 3 \qquad and \ldots$$

נתונה לנו הנגזרת – כביכול עשינו אינטגרל...

הגדרה – "סדר המד"ר" הוא הסדר של הנגזרת הכי גבוהה (כמו "מעלת" הפולינום אבל זה לא החזקה הכי גבוהה)

דוגמאות :

$y'' - y' + 8 = 0$ סדר שני

$\frac{1}{1 + y'} = 0$ סדר ראשון

$(y')^4 + y''' = 5$ סדר שלישי

"בעיית התחלה"

מד"ר עם תנאי. התנאי נקרא "תנאי ההתחלה".

לדוגמא "מחפשים פונקציה y ש":

בעיית התחלה

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 8 \end{cases}$$

תנאי התחלה

שימו לב - הפתרון יהיה פונקציה y שתקיים את המד"ר <u>וגם את התנאי</u>.

מד"ר מסדר שני לינארית במקדמים קבועים

מד"ר כזאת היא מהצורה:

האות r מלשון $right$
הביטוי שבאגף ימין

$$ay'' + by' + cy = r(x) \quad , \quad a, b, c : \text{קבועים}$$

אם $r(x) = 0$ אז המד"ר תיקרא **<u>הומוגנית</u>**.

אם $r(x) \neq 0$ אז המד"ר תיקרא **<u>אי – הומוגנית</u>**.

<u>משפט:</u>

<u>תמיד</u> נדע לפתור אלגוריתמית מד"ר מסדר שני לינארית במקדמים קבועים הומוגנית.

<u>משפט:</u> אם נתונה המשוואה עם אגף ימין ששונה מ-0:

$$ay'' + by' + cy = r(x) \quad , \quad r(x) \neq 0$$

אז הפתרון למד"ר תמיד יהיה בעל המבנה הבא:

$$\boxed{y = y_H(x) + y_P(x)}$$

הפתרון הכללי לבעיה ההומוגנית

פתרון פרטי למד"ר האי הומוגנית

<u>הסבר עד כאן:</u>

בהינתן מד"ר – נבדוק אם היא הומוגנית או אי הומוגנית. (כתוב 0 בצד ימין או לא?)

אם הומוגנית כלומר כתוב 0 – נפתור לפי אלגוריתם.

אם אי הומוגנית:

1. נהפוך אותה להומוגנית כלומר $r(x) = 0$ ונפתור על פי אלגוריתם. נקבל כתוצאה את $y_H(x)$.
2. נחפש פתרון פרטי בדרכים שונות, נבדוק אותו, ואם הוא נכון אז נוסיף אותו לפתרון ההומוגני.

אלגוריתם לפתרון מד"ר הומוגני

נתונה המד"ר מהצורה:

המשוואה המצורפת

$$\boxed{ay'' + by' + cy = 0}$$

1. מציבים $y = e^{\lambda x}$ במד"ר. מתקבלת משוואה ריבועית כזו: $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ עם המשתנה λ (למדה). (זה תמיד ככה!)

2. פותרים את המשוואה שהתקבלה לפי טרינום או נוסחת שורשים רגילה.

האופציות לפתרון:	2 פתרונות שונים (הביטוי בתוך השורש חיובי) אם $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ממשיים	פתרון יחיד (הביטוי בתוך השורש הוא 0) אם $\lambda_1 = \lambda_2$
"בסיס הפתרונות" הוא:	$\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}$	$\{e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}\}$
הפתרון ההומוגני הכללי:	$y_H = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$	$y_H = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x}$

3. רושמים את בסיס הפתרונות למד"ר ההומוגנית לפי הטבלה שלעיל.
רואים שהפתרון הכללי לבעיה ההומוגנית, שתלוי בשני קבועים, הוא "קומבינציה" של בסיס הפתרונות.

הערה: יש מקרה נוסף, שלישי – עליו נדבר בהמשך

בתכלס - בשביל לא לעשות את התהליך כל פעם מחדש – פשוט נחליף את הביטויים, באופן טכני, בצורה הזו:

$$\boxed{y'' = \lambda^2 \ , \qquad y' = \lambda \ , \qquad y = 1}$$

מה קורה אם קיבלנו בנוסחת שורשים: $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-15}}{2}$ <- המספר שבתוך השורש – שלילי!

מספרים מרוכבים

נגדיר מספר חדש: $i = \sqrt{-1}$

תבנית כללית - מספר מרוכב נראה ככה ויש לו שני מרכיבים:

$$\boxed{a + bi}$$

החלק הממשי הוא a

החלק המדומה הוא b

האופציות לפתרון:	אין פתרונות ממשיים (הביטוי בתוך השורש שלילי) אם $\lambda_1 \neq \lambda_2$ מרוכבים
"בסיס הפתרונות" הוא:	$\{e^{\alpha x}\sin(bx), e^{\alpha x}cos(bx)\}$
הפתרון ההומוגני הכללי:	$y_H = C_1 e^{\alpha x} sin(bx) + C_2 e^{\alpha x} cos(bx)$

משפט:

נתונה המד"ר:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

למד"ר יש מרחב פתרונות כמו שלמדנו $\{y_1(x), y_2(x)\}$ אז כל פתרון של המד"ר הוא תמיד צירוף של $y_1(x), y_2(x)$
כלומר תמיד **כל** פתרון הוא מהצורה $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$.

עד כאן הפתרון ההומוגני.

אנחנו זוכרים כי:

$$y = y_H(x) + y_P(x)$$

פתרון פרטי – טבלה 19.2.1:

מציאת $y_P(x)$ – אין שיטה שתמיד עובדת. אנחנו משתמשים **בניחוש מושכל**. ניעזר בטבלה.

טבלה 19.2.1 (עמוד 500 בספר):

$r(x)$ – תיאור במילים	משוואה	ניחוש ראשוני ל- $y_P(x)$
אקספוננט	$y'' + py' + qy = Ke^{ax}$	$y_P = Ae^{ax}$
פולינום	$y'' + py' + qy = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$	$y_P = A_0 + A_1 x + \cdots + A_n x^n$
וריאציה של cos ו- sin	$y'' + py' + qy = a_1 cos(bx) + a_2 sin(bx)$	$y_P = A_1 cos(bx) + A_2 sin(bx)$

1. מוצאים פתרון הומוגני לפי אלגוריתם והוא כולל את C_1, C_2. שמים אותו בצד וממשיכים.
2. עוברים לניחוש של הפתרון הפרטי שכולל את הפרמטרים הנוספים לפי המקרה המתאים שבטבלה.
3. מציבים את הפתרון הפרטי במשוואה, לצורך מציאת הפרמטרים.
4. במקרה שמצאנו בונים את הפתרון הכללי.
5. אחרי שיש פתרון כללי רק אז מפעילים את תנאי ההתחלה בשביל למצוא את C_1, C_2 ואז כותבים את הפתרון המלא.

כלל לשיפור הניחוש (עמוד 500 בספר) (זהו חלק מחיפוש הפתרון הפרטי)

"אם אחד (או יותר) מהמחוברים בניחוש הראשוני הוא (בעצמו) פתרון של המשוואה ההומוגנית המתאימה, כופלים את הניחוש הראשוני בחזקה הטבעית הקטנה ביותר של x, שמניבה פונקציה שאין בה שום מחובר שהוא פתרון של המשוואה ההומוגנית המתאימה."

בתכלס:

1. מסתכלים על הניחוש הראשוני של הפתרון הפרטי
2. משווים את הניחוש הראשוני לפתרון ההומוגני שכבר מצאנו קודם לכן
3. אם חלק מהניחוש הראשוני זהה לפתרון ההומוגני אז חייבים להפעיל את הכלל = ממשיכים לסעיף 4
   אם לא – סיימנו. הניחוש שלנו תקין. סיימנו. עוברים לסעיף 6
4. מכפילים את הניחוש הראשוני ב-x
5. חוזרים שוב לסעיף 2
6. מציבים את הפתרון הפרטי במשוואה, לצורך מציאת הפרמטרים.
7. בונים פתרון כללי.
8. אחרי שיש פתרון כללי - מפעילים את תנאי ההתחלה בשביל למצוא את C_1, C_2 ואז כותבים את הפתרון המלא.

עקרון "הסופר פוזיציה"

נניח תרגיל:

$$ay'' + by' + cy = r_1(x) + r_2(x)$$

כאשר $r_1(x) + r_2(x)$ הם מסוגים שונים. (לדוגמא פולינום פלוס סינוס)

איך פותרים?

הומוגני כרגיל:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

פתרון פרטי בנפרד לכל $r(x)$:

$$p_1 = ay'' + by' + cy = r_1(x)$$

$$p_2 = ay'' + by' + cy = r_2(x)$$

$$y_p = y_{p1} + y_{p2}$$

$$\boxed{y_{solution} = y_H + y_{p1} + y_{p2}}$$

מד"ר – פרק 19 – אלגוריתם לפתרון

המקרה הכללי שנקבל:

בעיית התחלה
$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = r(x) \\ y(0) = 7\,,\, y'(0) = 8 \end{cases}$$
תנאי התחלה

מבנה הפתרון יהיה:
$$y = \underbrace{y_H(x)} + y_P(x)$$

מתחילים מהפתרון ההומוגני. מבצעים המרה:
$$y'' = \lambda^2 \;,\; y' = \lambda \;,\; y = 1$$

מקבלים:
$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

פותרים בכל דרך שהיא:
$$x_{1,2} = \lambda_1, \lambda_2 \ldots$$

האופציות לפתרון:	2 פתרונות ממשיים שונים $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (הביטוי בתוך השורש חיובי)	פתרון יחיד $\lambda_1 = \lambda_2$ (הביטוי בתוך השורש הוא 0)	אין פתרונות ממשיים. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ מרוכבים (הביטוי בתוך השורש שלילי)
"בסיס הפתרונות" הוא:	$\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}$	$\{e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}\}$	$\{e^{\alpha x}\sin(bx), e^{\alpha x}\cos(bx)\}$
הפתרון ההומוגני הכללי:	$y_H = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$	$y_H = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x}$	$y_H = C_1 e^{\alpha x}\sin(bx) + C_2 e^{\alpha x}\cos(bx)$

מקרה ראשון: $r(x) = 0$

1. מקיימים על הפתרון ההומוגני את תנאי ההתחלה, אם קיימים, ופותרים.
כך מוצאים את c_1, c_2 שחסרים לנו.
2. $y_P(x) = 0$ -> $y_{solution} = y_H$

מקרה שני: $r(x) \neq 0$ – עוברים לניחוש הפתרון הפרטי לפי $r(x)$ מתאים

טבלה 19.2.1 (עמוד 500 בספר):

$r(x)$ – תיאור במילים	משוואה	ניחוש ראשוני ל- $y_P(x)$
אקספוננט	$y'' + py' + qy = Ke^{ax}$	$y_P = Ae^{ax}$
פולינום	$y'' + py' + qy = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$	$y_P = A_0 + A_1 x + \cdots + A_n x^n$
$\sin$ ו- $\cos$ עם אותה תדירות	$y'' + py' + qy = a_1\cos(bx) + a_2\sin(bx)$	$y_P = A_1\cos(bx) + A_2\sin(bx)$

1. משווים בין הניחוש הראשוני לבין מרחב הפתרונות ההומוגני.
2. במידה וחלק מהניחוש הראשוני זהה לפתרון ההומוגני אז חייבים להפעיל את ה"כלל לשיפור הניחוש" כלומר מכפילים את הניחוש הראשוני ב-x. ממשיכים להכפיל ב-x, ככל הנדרש, עד שיוצאים מהמרחב ההומוגני. (כאן בעצם משפרים את הניחוש הפרטי)
3. לאחר שמצאנו את הפתרון הפרטי המשופר המתאים שכבר לא מופיע בהומוגני, בונים את הפתרון הכללי.
4. אחרי שיש פתרון כללי רק אז מפעילים את תנאיי ההתחלה, אם קיימים, בשביל למצוא את C_1, C_2 ואז כותבים את הפתרון המלא.

__הערה:__
במידה ואגף ימין של בעיית ההתחלה מורכב משתי פונקציות שונות $r_1(x) + r_2(x)$ אז נמצא את הפתרון הפרטי עבור כל אחת מהן בנפרד ואז הפתרון הפרטי הכולל יהיה חיבור הפתרונות הפרטיים כלומר: $y_p = y_{p1} + y_{p2}$ (סופר פוזיציה)

סוף אלגוריתם