סיכום פרק 18 – נושאים באנליזה וקטורית

שדה וקטורי

<u>שדה וקטורי</u> = פונקציה מהמרחב או מהמישור אל המרחב.

$$F: V \to \mathbb{R}^3$$

מרחב
או
מישור

<u>סימון:</u>

תלת מימד

$$\underline{F}(x,y,z) = \big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\big) = P\underline{i} + Q\underline{j} + R\underline{k}$$
$$(x,y,z) \in V$$

דו מימד

$$\underline{F}(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big) = P\underline{i} + Q\underline{j}$$
$$(x,y) \in V$$

<u>וקטור המקום מוגדר כך:</u>

$$\underline{r} = (x,y)$$
$$\|\underline{r}\| = \sqrt{x^2+y^2} = r$$

שדה וקטורי + גרדיינט

חלק מהשדות הוקטוריים שנקבל הם <u>גרדיינט</u> של פונקציה דמיונית...

<u>דוגמאות</u>

גרדיינט שלה/השדה הנתון בתרגיל	פונקציה
$\underbrace{\varphi_y = \frac{2y}{x^2+y^2}}_{Q\text{ שלנו בתרגיל}}, \quad \underbrace{\varphi_x = \frac{2x}{x^2+y^2}}_{P\text{ שלנו בתרגיל}}$	$\varphi(x,y) = \ln(x^2+y^2)$
$\underbrace{\varphi_y = \frac{y}{x^2+y^2}}_{Q\text{ שלנו בתרגיל}}, \quad \underbrace{\varphi_x = \frac{x}{x^2+y^2}}_{P\text{ שלנו בתרגיל}}$	$\varphi(x,y) = \frac{\ln(x^2+y^2)}{2}$

כלומר אנחנו רואים ש- $\boxed{\nabla\varphi = (P,Q)}$

צריך לזכור שבשביל להגיע <u>משדה שנתון לנו לפונקציה</u> כפי שלמדנו באינטגרל...

לפעמים זה קורה ולפעמים לא...

לפעמים נוכל למצוא את הקבועה ולפעמים לא...

לפעמים היא תהיה קיימת ולפעמים לא...

רשימת פונקציות פוטנציאל ידועות

	השדה הנתון	פונקציית הפוטנציאל
1	$\underline{F}=(\frac{y}{x^2+y^2},\frac{-x}{x^2+y^2})$	$\varphi=arctan(\frac{x}{y})$
2	$\underline{F}=(\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2})$	$\varphi=arctan(\frac{y}{x})$
3	$\underline{F}=(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2})$	$\varphi=\frac{1}{2}ln(x^2+y^2)$
4	$\underline{F}=(\frac{2x}{3(x^2+y^2)},\frac{2y}{3(x^2+y^2)})$	$\varphi=\frac{1}{3}ln(x^2+y^2)$
5	$\underline{F}=(\frac{x}{2(x^2+y^2)},\frac{y}{2(x^2+y^2)})$	$\varphi=\frac{1}{4}ln(x^2+y^2)$
6	$\underline{F}=(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})$	$\varphi=\sqrt{x^2+y^2}$
7	$\underline{F}=(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2})$	$\varphi=\frac{x}{x^2+y^2}$
8	$\underline{F}=(\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2},\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2})$	$\varphi=\frac{y}{x^2+y^2}$
9	$\underline{F}=(\frac{y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}},\frac{-xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}})$	$\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$
10	$\underline{F}=(y+z,z+x,x+y)$	$\varphi=xy+xz+yz$
11	$\underline{F}=(\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2})$	$\varphi=-\frac{x}{x^2+y^2}$
12	$\underline{F}=\left(\frac{x}{(x^2+y^2)^2},\frac{y}{(x^2+y^2)^2}\right)$	$\varphi=-\frac{1}{2(x^2+y^2)}$
13	$\underline{F}=\left(\frac{x}{x^2+y^2}+y,\frac{y}{x^2+y^2}+x\right)$	$\varphi=\frac{1}{2}ln(x^2+y^2)+xy$
14	$\underline{F}=\left(-xcos(y^2-x^2),ycos(y^2-x^2)\right)$	$\varphi=\frac{1}{2}sin(y^2-x^2)$
15	$\underline{F}=\left(\frac{xy}{(x^2+y^2)^{1.5}},\frac{-x^2}{(x^2+y^2)^{1.5}}\right)$	$\varphi=-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

גרדיאנט שדה/השדה הנתון בתרגיל	פונקציה
$\varphi_x = \frac{2x}{x^2+y^2}$, $\varphi_y = \frac{2y}{x^2+y^2}$	$\varphi(x,y) = \ln(x^2+y^2)$
$\varphi_x = z$, $\varphi_y = y$, $\varphi_z = x$	$\varphi(x,y,z) = z\cdot x + \frac{y^2}{2}$
$P = \frac{x}{x^2+(y-1)^2}$, $Q = \frac{y-1}{x^2+(y-1)^2}$	$\psi = \frac{1}{2}\ln(x^2+(y-1)^2)$

יש לכם עוד? תכתבו לי...

פוטנציאל + שדה שמר

הגדרה פורמלית:

בהינתן תחום D במרחב או במישור ושדה וקטורי $\underline{F}$ שמוגדר ב-D,
אם יש ב-D פו' $f(x,y)$ או $f(x,y,z)$ כך ש:

$$\boxed{\nabla f = \underline{F}}$$

אזי:

1. f תיקרא **פוטנציאל** של השדה ב-D!
2. השדה $\underline{F}$ יקרא **שדה משמר** ב-D!
3. (נגיד $\underline{F}$ נובע/הוא גרדיאנט f, ב-D)

הערה חשובה:

שדה משמר הוא משהו שמתייחס לתחום מסוים... כלומר:
שדה יכול להיות — **משמר בתחום מסוים** **ולא משמר בתחום אחר**.
(דוגמא כמו רציפות בתחום א).

$$\boxed{\begin{array}{r}\text{אם } \underline{F} \text{ שמר ב-}D \text{ אז יש לו פוטנציאל ב-}D.\\ \text{ואם ל-}\underline{F} \text{ יש פוטנציאל ב-}D \text{ אז הוא משמר ב-}D.\end{array}}$$

עובדה לפני הכוונים...

שיטות למציאת פוטנציאל

נתון לנו שדה (P,Q). איך נמצא את הפוטנציאל שלו?

שיטה 1: ניחוש ! – מיועד לגאונים. אחרי שמנחשים מוודאים שהניחוש נכון..

שיטה 2: "אינטגרציה מאחור" – נגזים. שיטה אמינה.

הוכיחו כי השדה $\underline{F}=(y,x,1)$ משמר במרחב כולו. נמצא פוטנציאל במרחב.

תהי g הפוטנציאל המבוקש. $(g_x,g_y,g_z)=(y,x,1) \longrightarrow \nabla g=\underline{F}$

מתחילים עם השיוויון ברכיב הראשון:

$$g_x=y$$

מבצעים אינטגרציה לפי x:

קבוע מיוחד
קבוע שתלוי ב-(y,z)

$$g \text{ זו} \longrightarrow \boxed{g=y\cdot x+c(y,z)}$$

g_y

$$g_y=x=x+c_y$$

עוברים לשוויון ברכיב השני:

משווים ומגזרים את g לפי y.

$$c_y=0 \longrightarrow c=c(z)$$

משפרים את g:

קבוע מיוחד
קבוע שתלוי ב-(z)

$$g \text{ זו} \longrightarrow \boxed{g=y\cdot x+c(z)}$$

המשופרת

g_z

עוברים לשוויון ברכיב השלישי:

משווים ומגזרים את g לפי z.

$$g_z=1=c_z \longrightarrow c=z+k_0$$

מצאנו את g! $g(x,y,z)=y\cdot x+z$

ל-g אין מגבלות. מכאן אין מגבלות. לכן g היא הפוטנציאל של $\underline{F}$ בכל המרחב!

לכן $\underline{F}$ משמר בכל המרחב!

תנאי הכרחי לשימור

<u>משפט</u> - <u>תנאי הכרחי לקיום שימור</u> / <u>קיום פוטנציאל</u> בתחום D.

* אם D <u>במישור</u> אז הכרחי לשימור השדה (P,Q) הוא:

$$\boxed{Q_x = P_y}$$ ב-D.

---

* אם D <u>במרחב</u> אז הכרחי לשימור השדה (P,Q,R) הוא:

$$\boxed{\text{curl}(P,Q,R) = \underline{0}}$$

$$\text{curl}(P,Q,R) = \nabla \times (P,Q,R) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \langle \underbrace{R_y - Q_z}_{=0}, \underbrace{-R_x + P_z}_{=0}, \underbrace{Q_x - P_y}_{=0} \rangle$$

$$\nabla = \left(\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz}\right)$$

<u>נדרוש</u>:

$$R_y - Q_z = 0 \qquad -R_x + P_z = 0 \qquad Q_x - P_y = 0$$

תנאי מספיק לשימור

נתון שדה F ותחום D. איך נדע, אם כן, אם השדה משמר ב-D או לא?

אז אם מצליחים למצוא פוטנציאל לשדה בתחום D או יודעים שהוא משמר וסיימנו!

א. ע"י ניחוש (ראינו בפוטנציאלים ובדוגמאות מראש)

ב. ע"י שיטת אינטגרציה לאחור.

ומה קורה אם לא מצליחים למצוא פוטנציאל?

משפט 18.3.3 עמוד 441.

תנאי מספיק לשימור השדה במישור...

אם נתון שדה (P,Q) בתחום D פשוט קשר אז התנאי ההכרחי הופך למספיק!

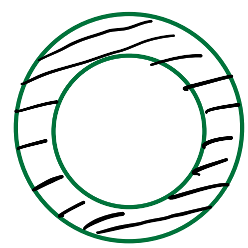
טוען: $\boxed{\text{אם } Q_x = P_y \text{ בתחום } D \text{ שהוא פשוט קשר אז השדה משמר ב-}D\text{!}}$

זהו תנאי מספיק טוען השדה משמר ב-D ויש לו פוטנציאל ב-D.

(הערה - אם D לא פשוט קשר לא נסיק שום דבר!)

(עוד הערה - לפעמים נגדיר בעצמנו תחום פשוט קשר מתאים... נראה בהמשך.)

תחום פשוט קשר = "תחום ללא חורים"

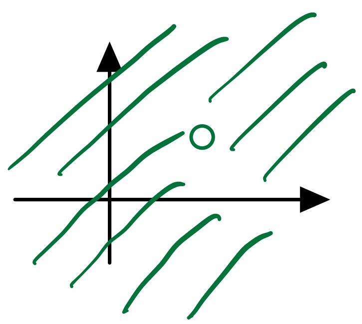


הטבעת - לא פשוט קשר

D המישור

$\downarrow$

פשוט קשר



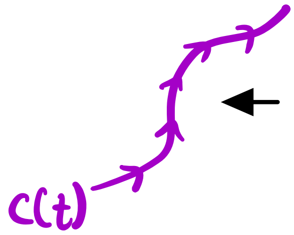
המישור ללא נקודה - לא פשוט קשר

תנאי מספיק לשימור

בקורס שלנו תנאי מספיק לשימור בשדה במרחב הוא התנאי ההכרחי שאומר:

$$\boxed{\mathrm{curl}(\underline{F}) = \underline{0}}$$

אינטגרל קווי לאורך עקומה



נתון שדה $\underline{F}=(P,Q,R)$ ונתונה מסילה $c(t)$ ←

הסימון אינטגרל קווי של השדה לאורך המסילה C הוא:

$$\boxed{\int_C Pdx+Qdy+Rdz=\int_C \underline{F}\cdot dr}$$

$dr=(dx,dy,dz)$

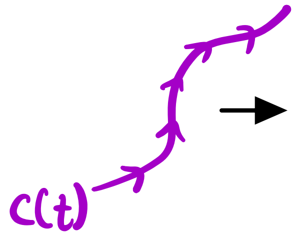
מה מייצג א. קווי בה 2

אם $\underline{F}$ היא שדה כוחות במרחב, סוגר, $F(x,y,z)$ היא הכוח הפועל על חלקיק במרחב אזי $\int_C \underline{F}\cdot dr$ מייצג את העבודה שעושה הכוח $\underline{F}$ שמניע את החלקיק לאורך C.

$$\int_C \underline{F}\cdot dr = \text{מספר} \begin{cases} =0 & \underline{F}\ \text{לא מבצע עבודה} \\ >0 & \text{החלקיק יגביר מהירות} \\ <0 & \text{החלקיק יפסיד מהירות} \end{cases}$$

אינטגרל קווי לאורך עקומה

חישוב הא.הקווי כאשר המסילה נתונה פרמטרית כך:



$$\rightarrow\ c(t)=\big(x(t),y(t),z(t)\big)$$

$$t_1\le t\le t_2$$

גוזרים את המסילה: $c'(t)=\big(x'(t),y'(t),z'(t)\big)$

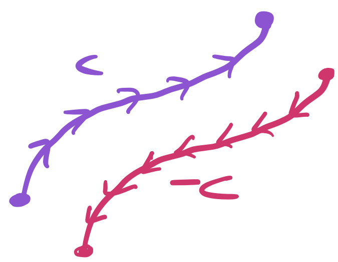
$$\int_C \underline{F}\cdot dr=\int_C Pdx+Qdy+Rdz=\int_{t_1}^{t_2}\underbrace{P\big(x(t),y(t),z(t)\big)}_{\text{P על המסילה}}x'(t)+\underbrace{Q\big(x(t),y(t),z(t)\big)}_{\text{Q על המסילה}}y'(t)+\underbrace{R\big(x(t),y(t),z(t)\big)}_{\text{R על המסילה}}z'(t)\,dt$$

<u>הערה:</u>

במידה והמסילה לא נתונה באופן פרמטרי, נצייר ונמצא פרמטרים ונתקדם לחישוב...

אינטגרל קווי לאורך עקומה-תכונות

1. אותה מסילה בכיוונים שונים.
אותן נקודות התחלה וסיום.

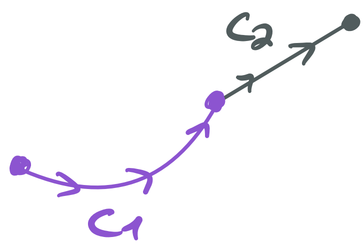


$$18.2.3 \longrightarrow \int_{-C}\underline{F}\cdot dr=-\int_C \underline{F}\cdot dr$$

הופכים כיוון מסילה ושמים מינוס.

---

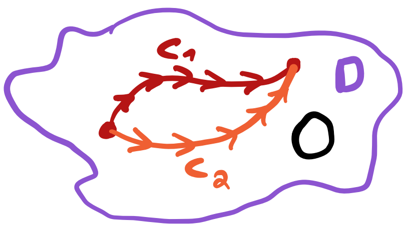
2. $$\int_{C_1\cup C_2}\underline{F}\cdot dr=\int_{C_1}\underline{F}\cdot dr+\int_{C_2}\underline{F}\cdot dr$$



חיבור מסילות

אינטגרל קווי – משפטים בסיסיים -18.3.1 עמוד 438

אם $\underline{F}$ שדה משמר ב-D אזי $\int_C \underline{F}\cdot dr$ **לא תלוי במסילה** C ב-D.
(משפט החלפת המסילה)



כלומר: $\int_{C_1} \underline{F}\cdot dr = \int_{C_2} \underline{F}\cdot dr$

* חובה שהנקודות במלואן יהיו בתוך התחום D, ובאותו כיוון!.

השדה משמר את תוצאת האינטגרל הקווי!

בפרקטיקה:
אם השדה משמר בתחום D, והמסילה הנתונה בתרגיל לא נוחה לחישוב...
נחליף מסילה!
תוצאות האינטגרל גם ככה תשאר אותה תוצאה...

אם g פוטנציאל של $\underline{F}$ ב-D ($\underline{F}$ שדה משמר) אזי:

$\{\nabla g = \underline{F}\}$

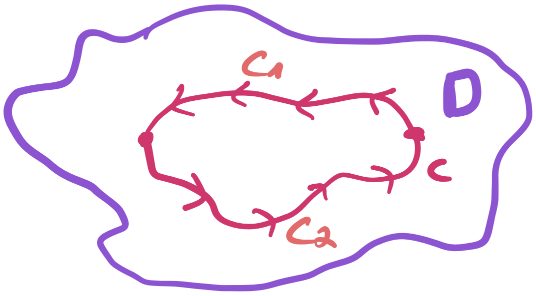
$$\boxed{\int_C \underline{F}\cdot dr = g(End) - g(START)}$$

נקודת סיום המסילה
נקודת התחלת המסילה

המסילה לא משנה!
רק נקודת ההתחלה
נקודת הסיום והכיוון

אינטגרל קווי - משפטים מרכזיים

F משמר ב-D $\Longleftrightarrow$ $\oint_C \underline{F}\cdot dr = \underline{0}$ $\boxed{\text{לכל מסילה } C \text{ סגורה}}$ ב-D.



$$\oint_C \underline{F}\cdot dr = \underline{0}$$

כולנו חייבים לצאת מסיור...

<u>ניסוח אחר:</u>

(F משמר ב-D $\Longleftrightarrow$ $\int_C \underline{F}\cdot dr$ לא תלוי ב-C.
כלומר $\Longleftrightarrow$ לכל 2 מסילות C_1, C_2 ב-D עם אותו כיוון/התחלה וסיום
נקבל אותו ערך לא.הקווי.)

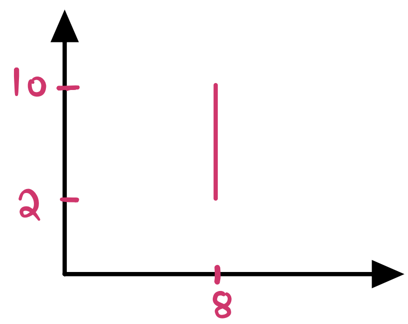
שימו לב!

אם חישבנו $\oint_C \underline{F}\cdot dr$ על מסילה C <u>סגורה</u>, והתוצאה יצאה שונה מ-0,

אז השדה <u>בהכרח לא משמר</u>!

אינטגרל קווי - משפטים ברגמיים

בחירת מסלול:

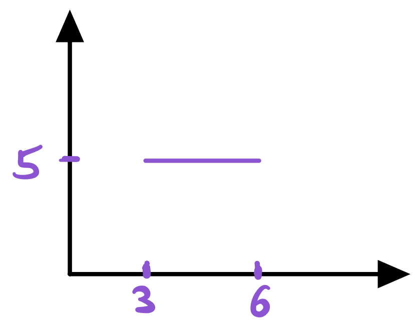


$c(t)=(8,t)$

$c'(t)=(0,1)$

$2\le t\le 10$

$$\int_c P\,\overbrace{dx}^{0}+Q\,dy$$



$c(t)=(t,5)$

$c'(t)=(1,0)$

$3\le t\le 6$

$$\int_c P\,dx+Q\,\overbrace{dy}^{0}$$

בחירת מסלול מקביל לצירים - חצי מהאינטגרל נעלם!

משפט גרין - ספר 18.4 עמוד 447

משפט זה מגדיר קשר מעניין בין אינטגרל קווי לאינטגרל כפול.
המשפט הוא בעצם נוסחת גרין.

$$\boxed{\oint_C Pdx+Qdy=\iint_D (Q_x-P_y)\,dxdy}$$

כאשר:

C בכיוון החיובי - נגד כיוון השעון {C סגורה כמובן}

C היא שפה של תחום D פשוט קשר.

במילים:

במקום לחשב א. קווי של מסילה סגורה C, ניתן לחשב א. כפול על התחום D שהיא שפתו... כאשר Q_x-P_y בתוך האינטגרל.

$$\boxed{\text{נחשוב על גרין כאשר } Q_x\neq P_y \text{ כלומר כשהשדה לא משמר?}}$$

אם $Q_x=P_y$ אז $\iint_D (Q_x-P_y)\,dxdy=0$

אלגוריתם לפתרון - פרק 18

נתון א.קווי ושדה (P,Q) $\quad \int_C P\,dx+Q\,dy=\int_C \underline{F}\cdot dr$

נבדוק

$$Q_x \overset{?}{=} P_y$$

חישוב ישיר א.קווי

ע"י הצגה פרמטרית — והצבה באינטגרל

$$\int_C P\,dx+Q\,dy=\int_{t_1}^{t_2}\Big(\overbrace{P(x(t),y(t))}^{P\text{ על המסילה}}x'(t)+\overbrace{Q(x(t),y(t))}^{Q\text{ על המסילה}}y'(t)\Big)dt$$

{נשתמש בפרמטריזציה "נוחה" ומתאימה לשדה הנתון}

לא

1. השדה לא משמר
2. אין פוטנציאל
3. נשקול גרין

$$\oint_C P\,dx+Q\,dy=\iint_D (Q_x-P_y)\,dx\,dy$$

C בכיוון החיובי - נגד כיוון השעון {סגורה}
C היא שפה של תחום D פשוט קשר.

כן

תחום פשוט קשר?

לא

נחפש פונקציה-פוטנציאל ⇐ {רשימת פונקציות ידועות / ניחוש / אינטגרציה לאחור}

$$\int_C \underline{F}\cdot dr=g(End)-g(START)$$

צריכים להוכיח שהשדה לא משמר בתחום D:
1. נבחר שני מסלולים שונים ב-D ונראה שהתוצאות — הא.הקווי עליהן לא זהה.
2. נבחר מסילה סגורה ב-D ונראה שהתוצאה — הא.הקווי עליה שונה מאפס.

כן

השדה משמר?

1. יש פונקציה-פוטנציאל ⇐ {רשימת פונקציות ידועות / ניחוש / אינטגרציה לאחור}

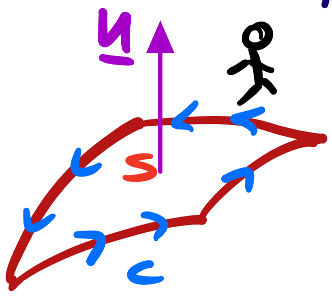
$$\int_C \underline{F}\cdot dr=g(End)-g(START)$$

2. נשקול החלפת מסילה ⇐ {מקבילה לצירים / חלק ממעגל / קווים ישרים} — כן

3. א.קווי על מסילה סגורה הוא 0 $\quad \oint_C \underline{F}\cdot dr=\underline{0}$

נושאים באנליזה וקטורית – פרק 18

משפט סטוקס סעיף 18.8 - עמוד 480



s משטח גזירה

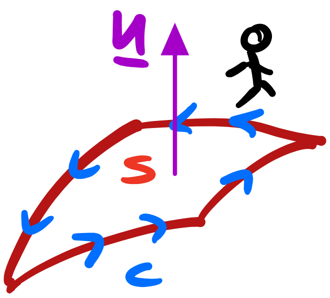
c השפה של s

איש הולך על c כאשר המשטח משמאלו. זו ההגדרה של כיוון חיובי.

כמו נעבור מכלל היד הימני———ooo

$$\boxed{\text{כיוון הבוהן הוא כיוון הנורמל החיצוני למשטח}}$$

נוסחת סטוקס (קשר בין אינטגרל קווי למשטחי)



יהי s משטח עם שפה c בכיוון החיובי.

יהי $\underline{n}$ נורמל יחידה חיצוני למשטח s.

יהי $\underline{F}$ שדה וקטורי גזירה.

$$\boxed{\oint_c \underline{F}\cdot d\underline{r} = \iint_s curl(\underline{F})\cdot \underline{n}\, ds}$$

כמובן שהנוסחה עובדת לשני הכיוונים ☺

מכפלה סקלרית בין וקטורים

"שפה"

שדה נחמד גזירה

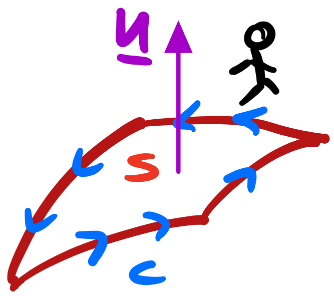
אינטגרל משטחי על המשטח s

מחשבים בהרצאה

נורמל בגודל 1 "חיצוני"

נושאים באנליזה וקטורית – פרק 18

נוסחת סטוקס (קשר בין אינטגרל קווי למשטחי)



יהי S משטח עם שפה C בכיוון החיובי.

יהי $\underline{n}$ נורמל יחידה חיצוני למשטח S.

יהי $\underline{F}$ שדה וקטורי במרחב.

$$\boxed{\oint_C \underline{F}\cdot d\underline{r} = \iint_S \text{curl}(\underline{F})\cdot \underline{n}\, dS}$$

כמובן שהנוסחא עובדת לשני הכיוונים!

מכפלה סקלרית בין וקטורים

״שפה״

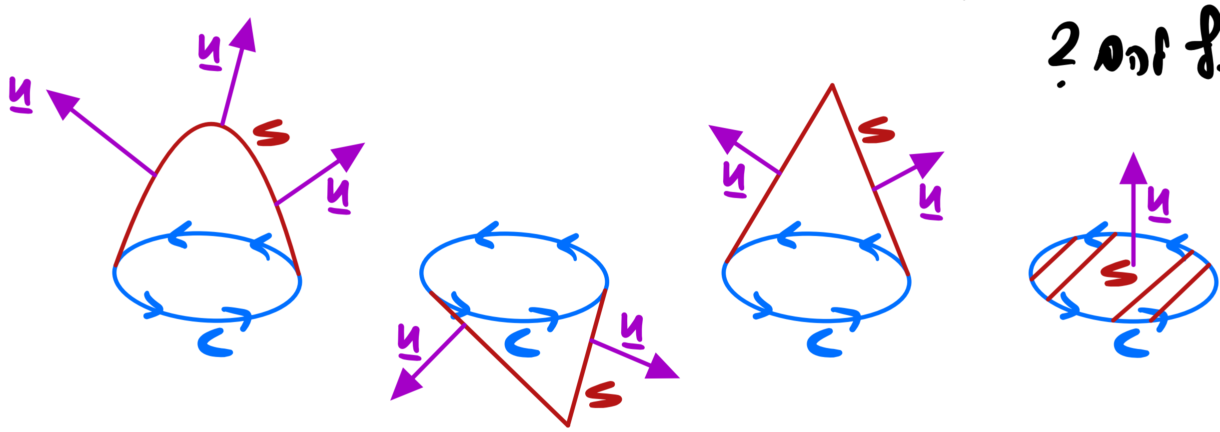
שדה נתון במרחב

אינטגרל משטחי על המשטח S

מחשבים ברוטציה

נורמל בגודל 1 ״חיצוני״

נסתכל על המשטחים הבאים:
מה משותף להם?



וואו!

לשפה C יש המון משטחי S שהיא שפתם.

מסקנה חשובה: נוכל לבחור S כרצוננו!

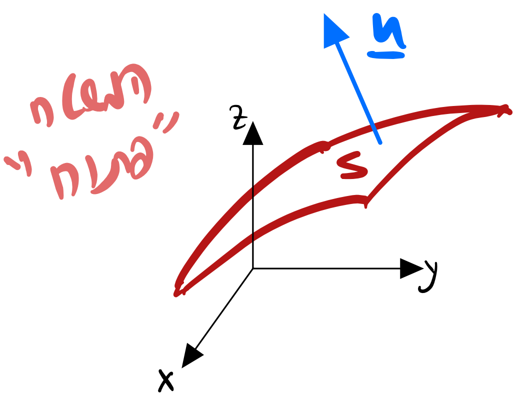
נושאים באנליזה וקטורית – פרק 18

שטף של שדה – סעיף 18.6 עמוד 462

2 דרכים לחישוב:

1. חישוב ישיר

בהינתן שדה (שדה זרימה) $\underline{F}$ ומשטח S עם נורמל יחידה חיצוני $\underline{n}$,
השטף של השדה דרך S מוגדר להיות:



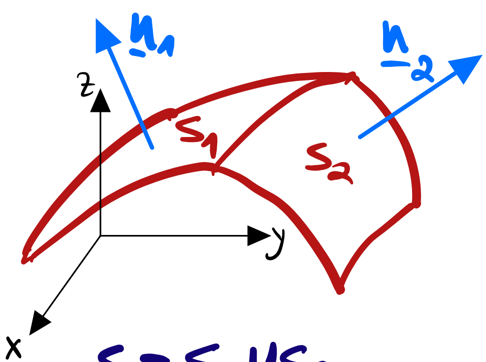
$$\boxed{\phi = \oiint = \iint_S \underline{F}\cdot\underline{n}\, ds}$$

מכפלה סקלרית בין וקטורים

אינטגרל משטחי על המשטח S

השדה עצמו וקטור

נורמל באורך 1 "חיצוני"



$S = S_1 \cup S_2$

$$\boxed{\phi = \oiint_S = \iint_{S_1} \underline{F}\cdot\underline{n}\, ds + \iint_{S_2} \underline{F}\cdot\underline{n}\, ds}$$

נושאים באנליזה וקטורית – פרק 18

שטף של שדה - סעיף 18.6 עמוד 462

2 דרכים לחישוב:

2. משפט גאוס / משפט הדיברגנץ - סעיף 18.7.1 עמוד 472

יהי נפח V שגבולו משטח S. כלומר המשטח S הוא שפה של הנפח התחום V.

יהי $\underline{n}$ נורמל יחידה חיצוני ל- S (משטח סגור).

אז:

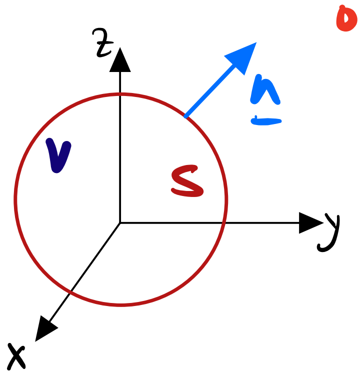
משולש ⟵ משטחי

$$\boxed{\phi = \text{שטף} = \iint_S F\cdot \underline{n}\, ds = \iiint_V \underbrace{\operatorname{div}(\underline{F})}\, dx\,dy\,dz}$$

רק אם המשטח כולא בתוכו נפח!

אינטגרל משולש על הנפח V

חייב להיות מוגדרת ב-V



עבור $\underline{F}=(P,Q,R)$ הדיברגנץ יהיה:

$$\boxed{\underbrace{\operatorname{div}(\underline{F})}= \underbrace{P_x + Q_y + R_z}}$$

מוגדר רק בתלת מימד

זה לא וקטור! מחברים!