פרק 3 - פונקציות

הגדרה של פונקציה - הגדרה 3.1 עמוד 75

פונקציה מקבוצה A לקבוצה B היא התאמה בין איברי A ל-B,
המשייכת לכל איבר של A איבר יחיד מתוך B.

סימון פונקציות: f, g, h

פונקציה f מ-A ל-B נכתוב כך $f: A \rightarrow B$

תחום, טווח, תמונה של איבר - הגדרה 3.2 עמוד 75

תהי $f: A \rightarrow B$

הקבוצה A מכונה התחום domain של f ומסומנת $Dom\,f$ (תחום)

הקבוצה B מכונה הטווח range של f ומסומנת $Ra\,f$ (טווח)

אם $a \in A$, כלומר לכל איבר בתחום, הפונקציה f משייכת איבר יחיד
מתוך B כלומר מתוך הטווח.

האיבר המותאם ל-a נקרא התמונה או הערך של a (לפי הפונקציה f)
הוא נכתב $f(a)$ ואומרים "f של a".

> לכל איבר בתחום צריך להיות מותאם איבר אחד ויחיד בטווח

פרק 3 - פונקציות

התמונה של פונקציה - הגדרה 3.3 עמוד 77

התמונה (image) של $f:A\to B$, היא תת קבוצה של B, שאיבריה הם התמונות (לפי f) של כל איברי A.

סימון: $\operatorname{Im} f$

מתכון: נעבור על הפונקציה f על כל האיברים בתחום, ונאסוף את התוצאות המתקבלות אל תוך קבוצה.
קבוצה זו היא התמונה.

גרף של פונקציה

תהי $f:A\to B$ פונקציה.

הגרף של f, שסימונו G_f, $G_f=\{\langle a,f(a)\rangle : a\in A\}$ מכונה הגרף של f.

פרק 3 - פונקציות

פונקציית הזהות - הגדרה 3.7 עמוד 81

תהי A קבוצה.

<u>פונקציית הזהות</u> (identity) של A היא הפונקציה $f:A\to A$ <u>המשייכת לכל איבר של A את עצמו</u>.

סימון פונקציית הזהות של A: id_A

סימון נוסף: I

התחום והטווח זהים

אם כן, $id_A: A\to A$,

$id_A(x)=x, \ x\in A$ לכל

$Id(6)=6 \quad Id(4)=4$

פרק 3 - פונקציות

תכונות

פונקציה על - הגדרה 3.11 עמוד 94

$f:A\to B$ היא על, אם לכל $b\in B$ יש לפחות מקור אחד ב-A.

f היא על, אם לכל $y\in B$ קיים $x\in A$ כך ש-$f(x)=y$

מתכלס: נסתכל על B האיברים בטווח. ננסה להבין האם נוכל לקבל כל אחד מהם על ידי הצבה בפונקציה של איבר חוקי כלשהו מהתחום.
איך נשלול: אם יש $y\in B$ שלא נמצא בעולם x כך ש-$f(x)=y$, אז נגיד כי f היא לא על.

* מסתכלים על כל האיברים בטווח

* רוצים לראות שכל אחד מהם מגיע לפחות (אחד לפחות)

פרק 3 - פונקציות

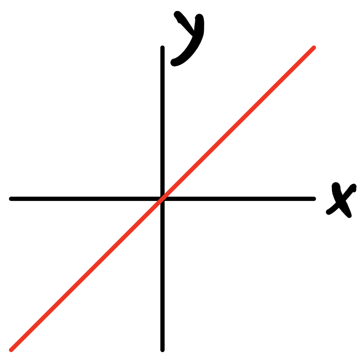
תכונות

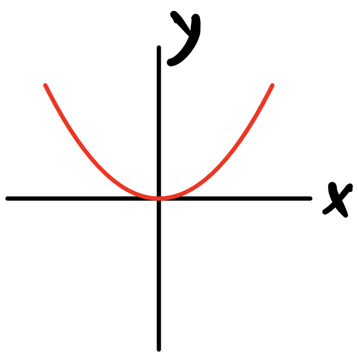
פונקציה חד חד ערכית (ח.ח.ע) - הגדרה 3.12 עמוד 94

$f:A\to B$ היא ח.ח.ע, אם לכל $b\in B$ יש לכל היותר מקור אחד ב-A.

כלומר אם לאיברים שונים של A יש תמונות שונות.

> תהי $f:A\to B$.
> עבור $x_1,x_2\in A$:
> **משפט:**
> 1. אם $x_1\neq x_2$ אז בהכרח $f(x_1)\neq f(x_2)$
> 2. אם $f(x_1)=f(x_2)$ אז בהכרח $x_1=x_2$





* מסתכלים על כל האיברים בטווח

* רוצים לראות שלכל אחד מהם מגיע מקסימום חץ אחד

פרק 3 - פונקציות

תכונות

פונקציה הפיכה - הגדרה 3.13 עמוד 98

פונקציה $f:A\to B$ נקראת הפיכה אם ורק אם היא חח"ע ועל.

הפונקציה, המתקבלת על ידי היפוך כיווני החיצים בדיאגרמה של פונקציה הפיכה $f:A\to B$ נקראת הפונקציה ההפוכה ל-f.

הפונקציה ההפוכה - הגדרה 3.14 עמוד 98

תהי $f:A\to B$ פונקציה הפיכה.

הפונקציה ההפוכה ל-f, שסימונה f^{-1}, היא פונקציה מ-B ל-A, המשייכת לכל $b\in B$ את המקור היחיד שלו ב-A.

עבור $f:A\to B$ הפיכה, $f^{-1}:B\to A$ תמיד לכל $b\in B$,

$f^{-1}(b)$ היא המקור היחיד של b.

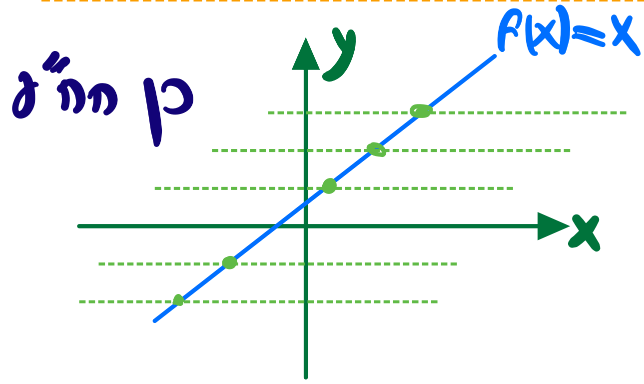
פרק 3- פונקציות

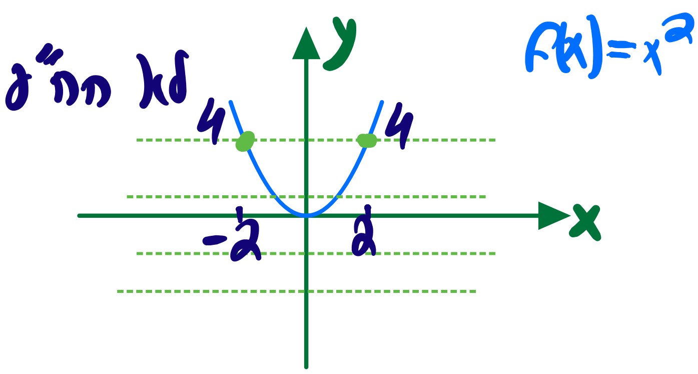
תכונות

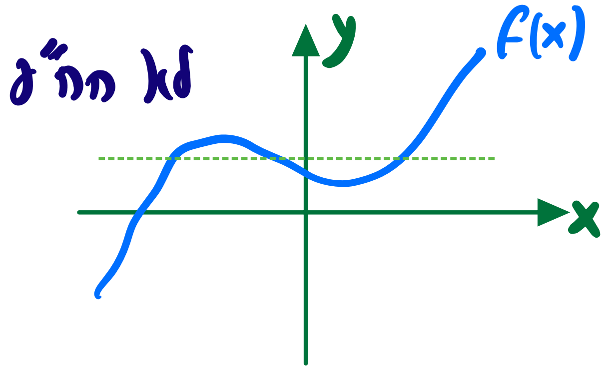
אינטואיציה גרפית

פונקציה חח"ע

קו אופקי מעביר יחתוך את הפונקציה **במקסימום** פעם אחת

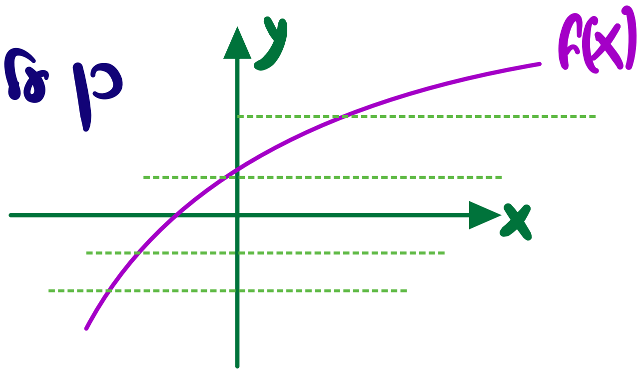


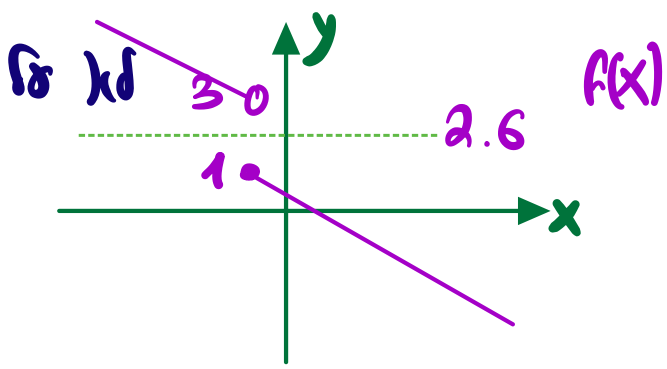


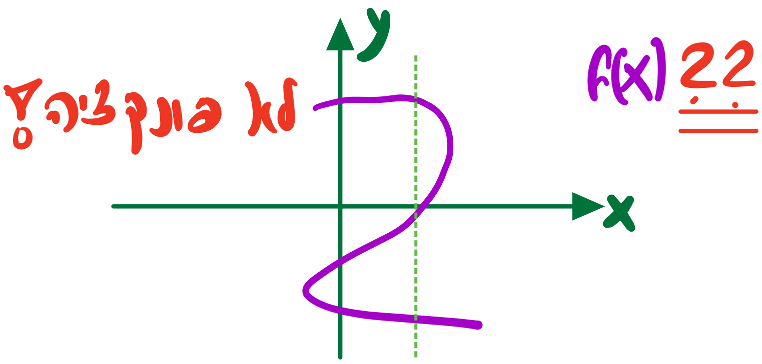


פונקציה על

קו אופקי מעביר יחתוך את הפונקציה **לפחות** פעם אחת





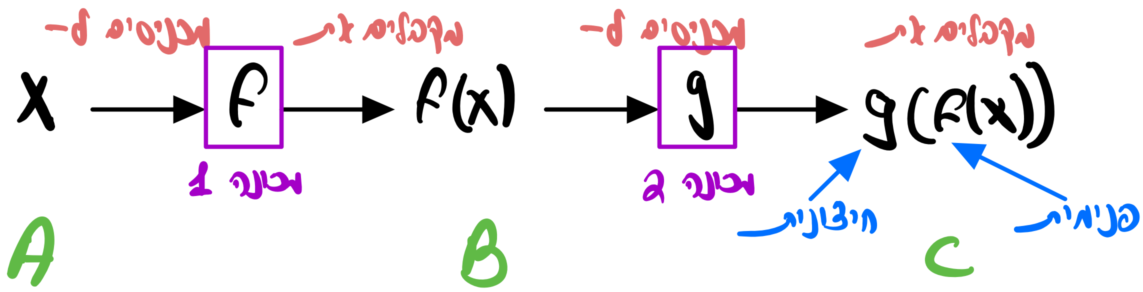


פרק 3 - פונקציות

הרכבת פונקציות - הגדרה 3.6 עמוד 100

תהי f פונקציה שתחומה A וטווחה B, ותהי $g:B\to C$.
ההרכבה של g על f, שסימונה $g\circ f$, היא פונקציה מ-A ל-C,
המתאימה לכל $x\in A$ את $g(f(x))$.

$$\boxed{g\circ f: A\to C,\ g\circ f(x):=g(f(x))}$$



2 מכונות שעובדות בטור.

* מומלץ להתחיל את הבניה מהפונקציה הפנימית

* כשבונים הרכבה - תחומי הענפים נלקחים מהפונקציה הפנימית.

פרק 3- פונקציות

הרכבת פונקציות - משפט 3.18

תהי $f:A\to B$.

אם קיימת פונקציה $g:B\to A$, כך ש- $f\circ g=Id_B$, $g\circ f=Id_A$

אז f הפיכה ו-g היא הפונקציה ההפוכה ל-f, כלומר $g=f^{-1}$.

זה צריך נספח - מהוכחת הפיכות ooo

שאלה 3.19

תהיינה $f:A\to B$ ו- $g:B\to C$, ונסתכל בהרכבה $g\circ f:A\to C$.

א. אם $g\circ f$ חד חד ערכית אז f חד חד ערכית - פנימיות

ב. אם $g\circ f$ על אז g על - חיצוניות

אם $f:A\to B$, $f^{-1}:B\to A$ אז $f\circ f^{-1}=Id$, $f^{-1}\circ f=Id$ עמוד 109

$Id\circ g(x)=g(x)$

$g(x)\circ Id=g(x)$ עמוד 106

מותר להשתמש

פרק 3 - פונקציות

פולינומים

הצגה סטנדרטית של פולינום - עמוד 113

$$p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$$

כאשר $a_n\neq 0$

n - מספר טבעי כולל $n\geq 0$

$a_n, a_{n-1}\dots$ = מספרים = "מקדמים"

$x^n, x^{n-1}\dots$ = חזקות של x ← $(x^3, x^5, x^1, x^2, x^0\dots)$

דוגמאות:

$$p(x)=-x^5+4x^3+6$$

$$g(x)=x-18x^4+9x^2-6x^6$$

* מעלת הפולינום היא 5 ו-6 בהתאמה. נשים לב של החזקות מופיעות אבל רק עם $x^0=1$.

* סכום/הפרש/מכפלה של פולינומים גם הם פולינומים. הכל נשאר במשפחה.

פרק 3 - פונקציות

פולינומים

מנה של פולינומים - הגדרה 3.21 עמוד 115

אם פולינום $P(x)$ ניתן להציג כמכפלה כזו:

$$\boxed{P(x)=H(x)\cdot Q(x) \rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)}=H(x)}$$

כאשר $Q(x), H(x)$ הם פולינומים, אז כל אחד מבין הפולינומים $Q(x), H(x)$ אומרים שהוא מחלק את $P(x)$.

אם Q מחלק את P רושמים $P|Q$, $\frac{P}{Q}$

והפולינום H שעבורו $P=H\cdot Q$ מכונה המנה.

דוגמא 1:

$$x^2+2x-15=(x-3)Q(x) \rightarrow \frac{x^2+2x-15}{\underset{\text{מחלק}}{(x-3)}}=\underset{\text{מנה}}{Q(x)}$$

כל רכיב פה הוא פולינום

דוגמא 2:

$$x^3+x^2-17x+15=(x-3)(x+5)(x-1)$$

$$\frac{x^3+x^2-17x+15}{\underset{\text{מחלק}}{(x+5)}}=\underset{\text{מנה}}{(x-3)(x-1)}$$

פרק 3 - פונקציות

פולינומים

שורש של פולינום - הגדרה 3.23 עמוד 122

> מספר ממשי a הוא שורש של פולינום $p(x)$
> אם ורק אם $p(a)=0$

תכלס: שורש הוא מספר שאם נציב אותו בפולינום נקבל 0.

שורש של פולינום - משפט 3.24 עמוד 122

> a הוא שורש של פולינום $p(x)$
> אם ורק אם $x-a$ מחלק את $p(x)$

פרק 3- פונקציות

פולינומים

חילוק פולינומים

שיטת עבודה:

1. נחלק את המונום עם החזקה הגבוהה (השמאלי) במונום עם החזקה הגבוהה (הימני). את התוצאה נכתוב למעלה.

2. ניקח את התוצאה שקיבלנו ונכפול אותה בכל הפולינום הימני. את התוצאה נכתוב מתחת לפולינום השמאלי.

3. נחסר באופן אנכי

4. כל עוד לא קיבלנו 0, חוזרים לשלב 1