פרק ב - יחסים

n-יה סדורה

הגדרה 1.2 עמוד 42 - n-יה סדורה

n עצמים $a_1,...,a_n$, שאינם בהכרח שונים זה מזה, הערוכים בסדר מסוים: ראשון, שני וכו׳, מהווים n-יה סדורה.

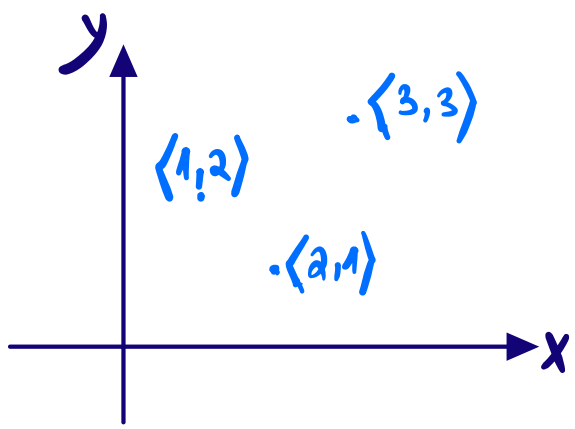
$$\langle a_1, a_2, ..., a_n \rangle$$

רכיב ראשון, רכיב שני, רכיב ה-n

---

n-יה באורך 2: "זוג סדור" $\langle x,y \rangle$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ → אנחנו נתרכז בזה

n-יה באורך 3: "שלשה סדורה"



- יש משמעות לסדר
- מותר שאבר יופיע פעמיים

פרק ב - יחסים

מכפלה קרטזית - הגד' מעמוד 28

בהינתן שתי קבוצות A,B, ניצור מהן קבוצה חדשה,
הנקראת המכפלה הקרטזית של שתי הקבוצות הללו ואשר סימונה הוא $A\times B$.

המכפלה הקרטזית

קבוצת הזוגות הסדורים אשר:

רכיבם הראשון הוא ב-A
ורכיבם השני הוא ב-B

$$A\times B=\{\langle a,b\rangle : a\in A,\ b\in B\}$$

$$\boxed{\langle x,y\rangle\in A\times B \iff x\in A\ ,\ y\in B}$$

שאלה 2.6 עמוד 31

חוקי הפילוג של המכפלה הקרטזית ביחד לאיחוד, לחיתוך ולהפרש.

א. $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)\ ,\ (B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$

ב. $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)\ ,\ (B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$

ג. $A\times(B\setminus C)=(A\times B)\setminus(A\times C)\ ,\ (B\setminus C)\times A=(B\times A)\setminus(C\times A)$

פרק ב - יחסים

הגדרות יחסים- החל מעמוד 32

הגדרה 2.3 עמוד 35 יחס דו מקומי

קבוצה R של זוגות סדורים נקראת יחס דו מקומי.

אם A ו-B קבוצות כך ש $R\subseteq A\times B$, אומרים ש-R הוא יחס מ-A ל-B.

אם C קבוצה כך ש $R\subseteq C\times C$, אומרים ש-R הוא יחס מעל C.

R-רֶלַצְיָה=יחס

זה מסמן תחום הגדרה. מאיפה הזוגות הסדורים לקוחים?

1. $R=\{\langle Z,N\rangle,\langle Z,N\rangle,\langle Z,N\rangle\}\longrightarrow$ ⟨שלם, טבעי⟩

2. $R=\{\langle N,N\rangle,\langle N,N\rangle,\langle N,N\rangle\}\longrightarrow$ ⟨טבעי, טבעי⟩

כל זוג במבנה הזה:

פרק ב - יחסים

סימונים

$A=\{1,2,3\}$ ו-T יחס מעל A שמקיים $T\subseteq A\times A$

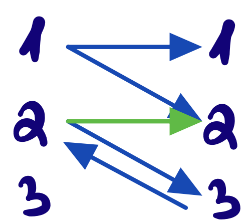
5 דרכים להצגת T:

1. כקבוצה: $T=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 2,2\rangle\}$

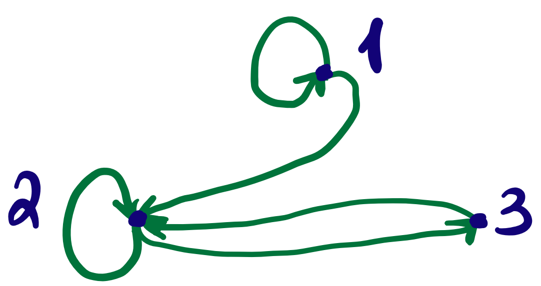
2. כטענות במובן יחס: $2T3$, $1T1$

3. במטריצת סוגריים: $T=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

4. בעזרת דיאגרמת חיצים:



5. בעזרת דיגרף:



פרק ב - יחסים

יחס הפוך

הגדרה 2.4 עמוד 40 - היפוך של יחס

ההיפוך של יחס דו מקומי R הוא היחס הדו מקומי R^{-1} (לא נכתוב $\frac{1}{R}$!)
המוגדר כך:

$$R^{-1}=\{\langle x,y\rangle \mid \langle y,x\rangle \in R\}$$

כלומר: $xR^{-1}y \iff yRx$

למשל אם $A=\{1,2,3\}$ ו-T יחס מעל A המוגדר כך:

$$T=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

אז:

$$T^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

הופכים את הסדר של הזוגות המסודרים - לא הכל!

פרק ב - יחסים

רפלקסיביות - עמוד 51

יהי R יחס בו מקומי מעל A.

R נקרא רפלקסיבי אם לכל $x\in A$ מתקיים: xRx,

כלומר לכל $x\in A$ מתקיים $\langle x,x\rangle \in R$

בעברית: כל איבר שנמצא ב-A, חייב להופיע ביחס - עם עצמו!

משפט 2.8

יחס R מעל A היא רפלקסיבי אם ורק אם הוא מכיל את יחס השוויון, כלומר אם ורק אם $I_A \subseteq R$.

אי רפלקסיביות - עמוד 53

יהי R יחס בו מקומי מעל A.

R נקרא אי רפלקסיבי אם לכל $x\in A$ מתקיים: $x\cancel{R}x$,

כלומר לכל $x\in A$ מתקיים $\langle x,x\rangle \notin R$

בעברית: כל איבר שנמצא ב-A, חייב שלא להופיע ביחס - עם עצמו!

פרק ב - יחסים

סימטריה - עמוד 53

יהי R יחס דו מקומי מעל A.

R נקרא סימטרי אם לכל $x\neq y$ מתקיים: $xRy\rightarrow yRx$

כלומר אם לכל $x\neq y$ מתקיים: $\langle y,x\rangle\in R \longrightarrow \langle x,y\rangle\in R$

העברית: אם יש ביחס זוג איברים שונים אחד מהשני, אז חייב שימצא ביחס אותו הזוג גם בסדר ההפוך.

משפט 2.11

יחס R הוא סימטרי אם ורק אם $R^{-1}\subseteq R$.

פרק ב - יחסים

אנטי סימטריה – עמוד 55

יהי R יחס דו מקומי מעל A.

- R נקרא אנטי סימטרי אם לכל $x \neq y$ מתקיים: $xRy \to y\cancel{R}x$

כלומר אם לכל $x \neq y$ מתקיים: $\langle y,x\rangle \cancel{\in} R \longrightarrow \langle x,y\rangle \in R$

- R נקרא אנטי סימטרי אם ורק אם $xRy \text{ AND } yRx \longrightarrow x=y$
- R נקרא אנטי סימטרי אם ורק אם לכל $x \neq y$ מתקיים: לכל היותר אחד מבין xRy, yRx

---

הערות: אם יש ביחס זוג איברים שונים אחד מהשני, אז אסור שיהיה ביחס אותו הזוג גם בסדר ההפוך.

פרק ב - יחסים

טרנזיטיביות - עמוד 57

יהי R יחס בין מקומי מעל A.

R נקרא טרנזיטיבי אם לכל x,y,z מתקיים: $xRy \text{ AND } yRz \rightarrow xRz$

כלומר אם לכל x,y,z מתקיים: $\langle x,y\rangle \in R \text{ AND } \langle y,z\rangle \in R \rightarrow \langle x,z\rangle \in R$

העברתיות: לכל שני צעדים מטורפים הנמצאים ביחס, נמצא ביחס גם היחס עם האיברים המרוחקים.

יחס שקילות - עמוד 61

יחס דו מקומי מעל קבוצה A, שהוא:

$\boxed{\text{רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי}}$ ⟵ "וגם"

מכונה יחס שקילות

סימונים: $\sim, \approx, \equiv$

* אם אחת התכונות לא מתקיימת ⟵ לא שקילות

פרק ב - יחסים

יחס סדר - עמוד 70

סדר חלקי: יחס דו מקומי מעל קבוצה A, שהוא:

$\boxed{\text{אי רפלקסיבי, אנטי סימטרי וטרנזיטיבי}}$ ← "וגם"

סדר חלש: יחס דו מקומי מעל קבוצה A, שהוא:

$\boxed{\text{רפלקסיבי, אנטי סימטרי וטרנזיטיבי}}$ ← "וגם"

דוגמא פשוטה להרגיש:

	אי רפלקסיבי / רפלקסיבי	אנטי סימטרי	טרנזיטיבי
סדר חלקי: הסימן "$<$"	$1 \not< 1$	$1<2$ $2 \not< 1$	$1<2$ $2<3$ אז $1<3$
סדר חלש: הסימן "$\le$"	$1 \le 1$	$1 \le 2$ $2 \not\le 1$	$1 \le 2$ $2 \le 3$ אז $1 \le 3$

הערה חשובה: יחס נתון לא חייב להיות מסדר כלשהו.