פרק 1 - מושגים בסיסיים בתורת הקבוצות

קבוצות ואיברים

הגדרה וחוקים

קבוצה = אוסף של איברים.

נסמן { } - "סוגריים מסולסלים"

שמות הקבוצות באותיות גדולות: A, B, C, D.

דוגמא לקבוצה:

בין הסוגריים נמצאים איברי הקבוצה. נאמר שיש 7 איברים
$|A|=7$

יש קבוצה בתוך קבוצה. '[illegible]'.
כל הקבוצה שמכילה את האיבר 7. היא איבר בתוך הקבוצה A.

$A=\{7,3,\{7\},\Delta,-18,$ ירושלים, בירה$\}$

הקבוצה שנקרא לה A

סוגריים שמסמנים כי קבוצה

$7 \neq \{7\}$
איבר קבוצה

"קופסא גדולה ובתוכה קופסא קטנה"

חוקים:

1. בקבוצות אין משמעות לסדר הופעה של האיברים.

נתונים $A=\{1,3\}, B=\{3,1\} \rightarrow \boxed{A=B}$

2. בקבוצות אין משמעות להופעה של אותו איבר פעמיים. נתייחס אליו פעם אחת בלבד.

נתונים $A=\{4,9,8,9\}, B=\{8,9,4\} \rightarrow \boxed{A=B}$

פרק 1 - מושגים בסיסיים בתורת הקבוצות

קבוצות ואיברים

$\in$ - האופרטור "שייך"

נבדוק: האם איבר "שייך" או "לא שייך" לקבוצה. (אין אופציה אחרת)

איבר משמאל - קבוצה מימין
זה סתמי לקבוצות!

המבנה קבוע: $\boxed{\text{איבר} \notin \text{קבוצה}}$ או $\boxed{\text{איבר} \in \text{קבוצה}}$

* על מנת שאיבר יהיה שייך לקבוצה:
היא חייב להופיע כמו שהוא, בדיוק, בין המפסיקים בקבוצה. מופיע פיזית.
כל המבנה שמשמאל צריך להופיע כמו שהוא.

פרק 1 - מושגים בסיסיים בתורת הקבוצות

קבוצות ואיברים

$\subseteq$ - האופרטור "מוכל או שווה"

האופרטור הנה מבוסס על $\in$ אז קודם צריך לשלוט בו.

חשוב! האופרטור פועל על שתי קבוצות.

"קבוצה שמאלית" "קבוצה ימנית"

$\boxed{\text{קבוצה} \subseteq \text{קבוצה}}$

צד שמאל חייב להיות קבוצה! צד ימין חייב להיות קבוצה!

נבדוק: האם כל איבר בקבוצה השמאלית "שייך" לקבוצה הימנית?

אם $A\subseteq B$ אז נגיד:

A תלויה ב-B / A תת קבוצה של B / A מוכלת ב-B / B מכילה את A

* אם רוצים את האופרטור $\subseteq$ מתייחסים לכל אחד מהצדדים כקבוצה

$\subset$ - האופרטור "מוכל ממש ולא שווה" "מוכל וגם שונה"

הסימן $\subseteq$ מאפשר שוויון

הסימן $\subset$ לא מאפשר שוויון

פרק 1 - מושגים בסיסיים בתורת הקבוצות

קבוצות ואיברים

הקבוצה הריקה

אם A היא קבוצה ריקה אז נכתוב $A=\{\ \}=\phi$

זוהי קבוצה ש"יש בה כלום", אין בה איברים, שק ריק.

חוק חשוב! הקבוצה הריקה מוכלת בכל קבוצה!

קבוצות מספרים מוכרות - עמוד 4 בספר

תיאור הקבוצה	שם הקבוצה	סימון
$N=\{0,1,2,3,4...\}$	המספרים הטבעיים	N
$Z=\{...-3,-2,-1,0,1,2,3...\}$	המספרים השלמים	Z
$Q=\{\frac{m}{n}: n\neq 0, m,n\in Z\}$	המספרים הרציונליים	Q
$R= \longrightarrow x$	המספרים הממשיים	R

* בקורס שלנו המספר 0 נכלל בתוך קבוצת המספרים הטבעיים.

פרק 1 - מושגים בסיסיים בתורת הקבוצות

קבוצות ואיברים

קטעים: (עמוד 4 בספר)

שם	תיאור מילולי	תיאור הקבוצה "מפורש"
קטע סגור	מ-a ל-b כולל הקצוות	$[a,b]=\{x\in R: a\le x\le b\}$
קטע פתוח	מ-a ל-b לא כולל הקצוות	$(a,b)=\{x\in R: a<x<b\}$
קטע חצי פתוח מימין	מ-a ל-b כולל קצה אחד	$[a,b)=\{x\in R: a\le x<b\}$
קטע חצי פתוח משמאל	מ-a ל-b כולל קצה אחד	$(a,b]=\{x\in R: a<x\le b\}$

* הסימון ":" יוחלף עכשיו תמיד בקו מאונך "|". שניהם אומרים "כך ש..."

$$\{x\in N \mid 2\le x<6\}$$

בכתיבה כללית:

{תנאים שהוא צריך לקיים מוגדרים בספיקים | מעיינו קבוצה x שייך}

פרק 1 - מושגים בסיסיים בתורת הקבוצות

קבוצות חדשות מקבוצות נתונות

איחוד

עמוד 14

$$\boxed{A \cup B = \{\text{כל האיברים של } A \text{ ושל } B\}}$$

מילת המפתח: "או"

$A=\{1,2\}$, $B=\{1,4\}$

$A \cup B = \{1,2,4\}$

באיחוד נשים את B חבילת A וחבילת B ביחד בארגז אחד שייקרא $A \cup B$!

תכונות האיחוד:

שם תכונה	התכונה
חילופיות קיבוציות	$A \cup B = B \cup A$ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup (C \cup B)$
אין שם	$A \cup A = A$ $A \cup \emptyset = A$ $A \subseteq A \cup B$ $B \subseteq A \cup B$ $A \subseteq B \leftrightarrow A \cup B = B$ $A \cup B \subseteq C \leftrightarrow A \subseteq C \text{ AND } B \subseteq C$

פרק 1 - מושגים בסיסיים בתורת הקבוצות

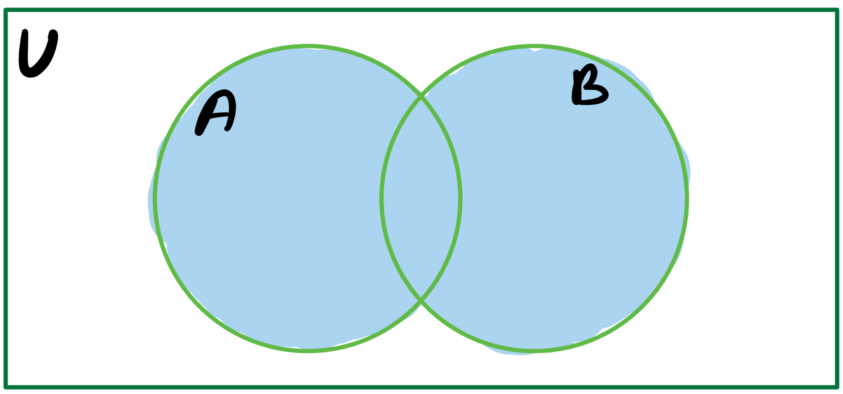
קבוצות חדשות מקבוצות נתונות

איחוד

תנאים של איבר באיחוד: ניקח איבר x. מה מתקיים?

$$x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A \text{ OR } x \in B$$
$$\text{IF } x \in A \rightarrow x \in A \cup B$$
$$\text{IF } x \in B \rightarrow x \in A \cup B$$
$$\text{IF } A \cup B = \emptyset \rightarrow A = \emptyset \text{ AND } B = \emptyset$$
$$\text{IF } x \notin A \cup B \rightarrow x \notin A \text{ AND } x \notin B$$

דיאגרמת ון:



U - קבוצת הגיון (Universe)
A,B - שתי קבוצות כלשהם
AUB - בכחול

בקורס שלנו
הדיאגרמה היא לא חובה...
זה רק לויזואליזציה

פרק 1 - מושגים בסיסיים בתורת הקבוצות

קבוצות חדשות מקבוצות נתונות

חיתוך

עמוד 17

$$A\cap B=\{\text{כל האיברים שמשותפים ל-}A\text{ ול-}B\}$$

מילות המפתח: "וגם"

$A=\{1,2\}$, $B=\{1,4\}$ $C=\{8,9\}$

$A\cap B=\{1\}$, $A\cap C=\emptyset$

בחיתוך נשים את 6 התכולה המשותפת גם ל-A וגם ל-B ביחד בארגז אחד שייקרא $A\cap B$!

תכונות החיתוך:

שם תכונה	התכונה
חילופיות קיבוציות	$A\cap B=B\cap A$ $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)=A\cap(C\cap B)$
אין שם	$A\cap A=A$ $A\cap\emptyset=\emptyset$ $A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B$ $A\cap B\subseteq B\subseteq A\cup B$ $A\subseteq B\leftrightarrow A\cap B=A$ $C\subseteq A\cap B\leftrightarrow C\subseteq A \text{ AND } C\subseteq B$

פרק 1 - מושגים בסיסיים מתורת הקבוצות

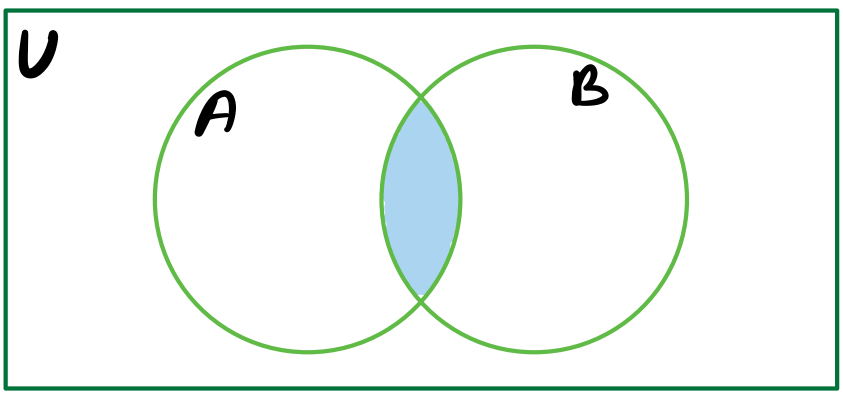
קבוצות חדשות מקבוצות נתונות

חיתוך

תנאים של איבר בחיתוך: ניקח איבר x. מה מתקיים?

$$x \in A\cap B \leftrightarrow x\in A \text{ AND } x\in B$$
$$x \notin A\cap B \leftrightarrow x\notin A \text{ OR } x\notin B \text{ OR } (x\notin A \text{ AND } x\notin B)$$
$$\text{IF } A\subseteq B\cap C \rightarrow A\subseteq B \text{ AND } A\subseteq C$$

דיאגרמת ון:



U - קבוצת העולם (Universe)
A,B - שתי קבוצות כלשהם
$A\cap B$ - החיתוך

בקורס שלנו
הדיאגרמה היא לא הוכחה...
זה רק אינטואיציה

פרק 1 - מושגים בסיסיים בתורת הקבוצות

קבוצות חדשות מקבוצות נתונות

הפרש

עמ' 21-22

$$A\setminus B = \left\{ \begin{array}{c} \text{כל האיברים של } A \\ \text{אחרי שמוציאים מהם את } B \end{array} \right\}$$

נגיד: "A בלי B", "A פחות B"

כמו סימן מינוס

$A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,4\}$

$$A\setminus B = \{1,2,3\}\setminus\{2,4\} = \{1,3\}$$

בהפרש תמיד ט הקבוצה של A ומתוכה נוריד את כל הקבוצה של B.

תכונות ההפרש:

שם תכונה	התכונה
משפט 1.11 סעיף 5 במשפטים שבסוף הספר	$A\setminus B = A\cap B^c$

פרק 1 - מושגים בסיסיים בתורת הקבוצות

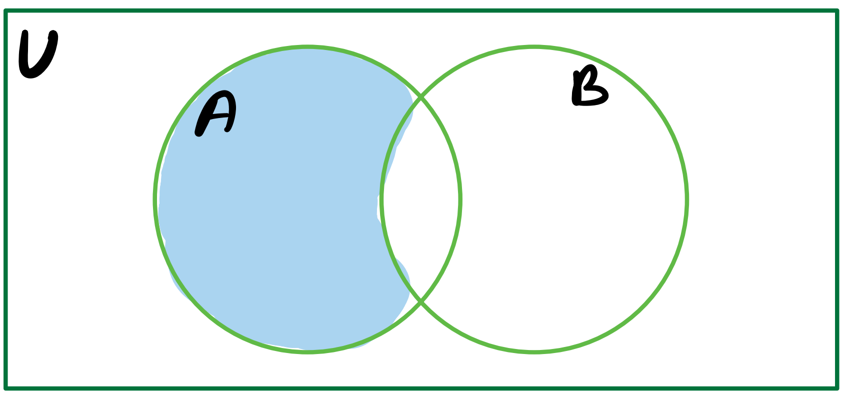
קבוצות חדשות מקבוצות נתונות

הפרש

תנאים של איבר בהפרש: ניקח איבר x. מה מתקיים?

$$\boxed{\begin{array}{l} x\in A\setminus B \leftrightarrow x\in A \text{ AND } x\notin B \\ x\notin A\setminus B \leftrightarrow x\notin A \text{ OR } x\in B \end{array}}$$

דיאגרמת ון:



U - קבוצת העולם (Universe)
A,B - שתי קבוצות כלשהם
A\B - ההפרש

בקורס שלנו
הדיאגרמה היא לא הוכחה...
זה רק אינטואיציה

פרק 1 - מושגים בסיסיים בתורת הקבוצות

קבוצות חדשות מקבוצות נתונות

הפרש סימטרי

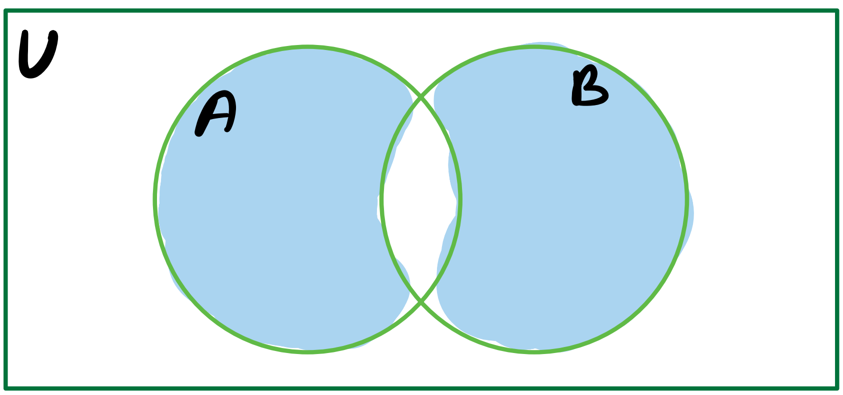
עמוד 23

$A\Delta B = \{$ כל האיברים שלא משותפים ל-A ול-B אבל כן נמצאים ב-A וב-B $\}$

הגדרות:

1. $A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$
2. $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$

דיאגרמת ון:



U - קבוצת העולם (Universe)
A,B - שתי קבוצות כמעגלים
$A\Delta B$ - בכחול

בקורס שלנו!
הדיאגרמה היא לא הוכחה...
זה רק אינטואיציה

פרק 1 - מושגים בסיסיים בתורת הקבוצות

קבוצות חדשות מקבוצות נתונות

המשלים

$$A^c = \left\{ \begin{array}{c} \text{כל האיברים שלא} \\ \text{נמצאים ב-} A \end{array} \right\}$$

$A=\{2,3\} \rightarrow A^c = ?$

שימו לב: תמיד חייבים להבין מהי קבוצת העולם - U

אם $U=\{2,3,8,9\}$ אז $A^c=\{8,9\}$

תכונות המשלים:

שם תכונה	התכונה
אין שם	$A \cap A^c = \phi$ $(A^c)^c = A$ $A \cup A^c = U$

פרק 1 - מושגים בסיסיים בתורת הקבוצות

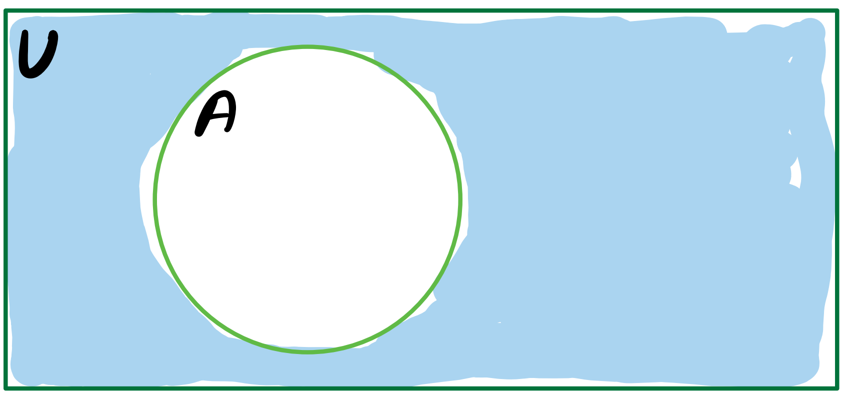
קבוצות חדשות מקבוצות נתונות

המשלים

תנאים של המשלים: ניקח איבר x. מה מתקיים?

$$\boxed{\begin{array}{c} x\in A \to x\notin A^c \\ x\in A^c \to x\notin A \end{array}}$$

דיאגרמת ון:



U - קבוצת הדיון (Universe)
A - קבוצה
A^c - בכחול!

בקורס שלנו
הדיאגרמה היא לא הוכחה...
זה רק אינטואיציה

פרק 1 - מושגים בסיסיים בתורת הקבוצות

קבוצת החזקה

עמוד טו

$$\boxed{P(A)=\{\text{כל תתי הקבוצות של } A\}}$$

$$A=\{2,3\} \longrightarrow P(A)=\{\{2\},\{3\},\overset{A}{\{2,3\}},\emptyset\}$$

הערות חשובות!

* איברי הקבוצה $P(A)$ חייבים להיות קבוצות!
* הקבוצה A עצמה היא תמיד איבר ב- $P(A)$
* הקבוצה הריקה חייבת להיות איבר ב- $P(A)$
כי $\emptyset$ מוכלת בכל קבוצה.
* מספר האיברים $|P(A)|=2^{|A|}$

טל מרכזי מאוד!

$$\boxed{B\subseteq A \leftrightarrow B\in P(A)}$$

פרק 1 - מושגים בסיסיים בתורת הקבוצות

טכניקות הוכחה

עבודה לפי הגדרות

נלמד כיצד להוכיח הכלה בין קבוצות.

נרצה להוכיח: $A \subseteq B$

אגף שמאל — A, אגף ימין — B

הטקטיקה להוכחה:

ניקח איבר כללי באגף שמאל (יהי $x \in A$)
ונרצה להראות, לפי כללים והגדרות, שהאיבר הכללי הזה
שלקחנו נמצא גם באגף ימין (נוכיח $x \in B$)

נזכיר:

הוכחת שיוויון בין קבוצות זו הוכחת הכלה דו כיוונית.

אם $A \subseteq B$ וגם $B \subseteq A$ אז $A = B$

פרק 1 - מושגים בסיסיים בתורת הקבוצות

טכניקות הוכחה

הוכחה בשלילה

נניח שרוצים להוכיח ש- $A \subseteq B$.

אפשר להניח בשלילה שמה שצריך להוכיח ← לא מתקיים,

כלומר נניח בשלילה כי $A \nsubseteq B$ ואז ננסה להגיע לסתירה.

לרוב, הסתירה תהיה לנתוני התרגיל.

נוח להשתמש בטכניקה הנ"ל:

כאשר ישנן רק שתי אופציות ל-מה שרוצים להוכיח.

(מצב בינארי)

פרק 1 - מושגים בסיסיים בתורת הקבוצות

טכניקות הוכחה

אלגברה של קבוצות

נשתמש בטכניקה זו בעיקר כשצ"ל שיוויון בין קבוצות

עמוד 226

נוסחאות לפרק 1 תורת הקבוצות

חוקי הפילוג – משפט 1.7 עמוד 226	משפט 1.11 עמוד 226	חוקי דה מורגן – משפט 1.12 עמוד 226
$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$	$U^c=\emptyset\ ,\quad \emptyset^c=U$ $(A^c)^c=A$ $A\cap A^c=\emptyset$ $A\cup A^c=U$ $A\setminus B=A\cap B^c$ $A\cap B=\emptyset\leftrightarrow A\subseteq B^c$ $A\subseteq B\leftrightarrow B^c\subseteq A^c$	$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$ $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$

דגש מרכזי:
חייבים לזכור שמדובר בתבניות