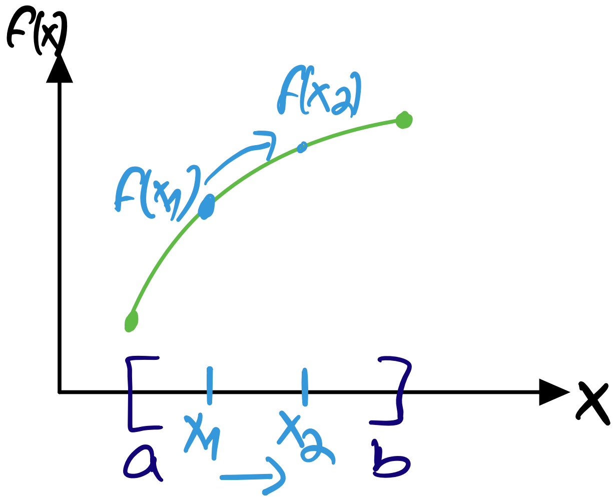
פרק 4 – יישומי הנגזרת

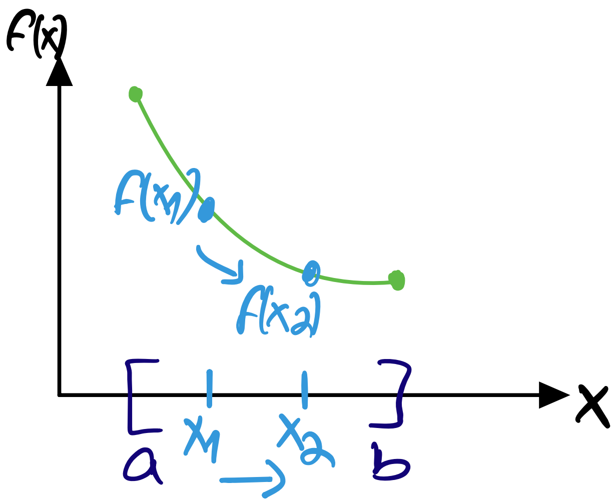
מונוטוניות של פונקציה – 4.2.1

הגדרת המונוטוניות:



עלייה

f תיקרא <u>עולה</u> בקטע (a,b) אם לכל $a<x_1<x_2<b$ מתקיים $f(x_1)<f(x_2)$.



ירידה

f תיקרא <u>יורדת</u> בקטע (a,b) אם לכל $a<x_1<x_2<b$ מתקיים $f(x_1)>f(x_2)$.

נשים לב שאין הבדל בין רציפות או לגזירות.

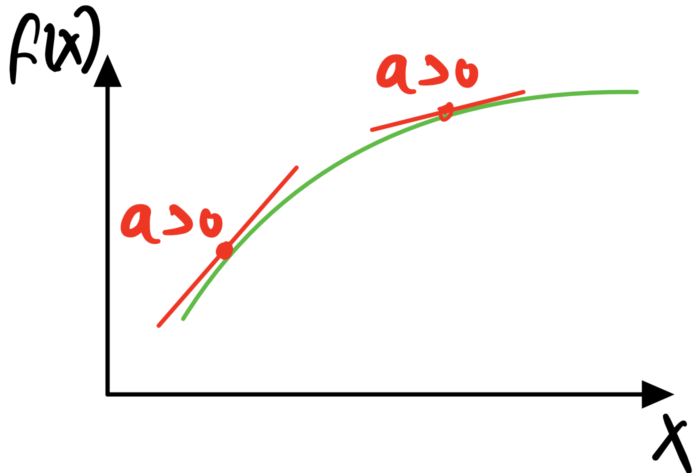
פרק 4 - יישומי הנגזרת

קשר בין מונוטוניות לבין נגזרת

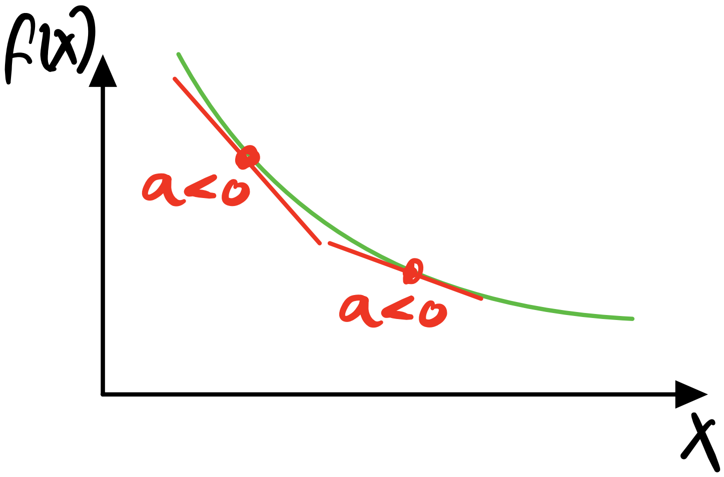
נניח שהפונקציה $f(x)$ גזירה לכל x. אם כך אזי:

מונוטוניות עולה | **מונוטוניות יורדת**

a זה שיפוע הקו המשיק בכל נקודה



משיקים עולים
כלומר השיפוע חיובי
כלומר הפונקציה עולה



משיקים יורדים
כלומר השיפוע שלילי
כלומר הפונקציה יורדת

> שיפוע המשיק בנקודה מעיד על שיפוע הפונקציה באותה נקודה

פרק 4 – יישומי הנגזרת

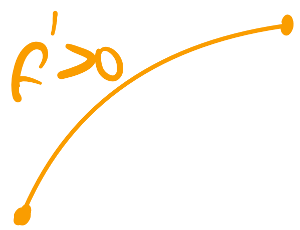
קשר בין מונוטוניות לבין נגזרת

[illegible] 4.2.2 עמוד 221

אם f רציפה בקטע סגור $[a,b]$ ואם $f'>0$ בקטע פתוח (a,b)

אזי f עולה בקטע הסגור $[a,b]$.

כלומר f עולה עד כולל הקצוות.



אם f רציפה בקטע סגור $[a,b]$ ואם $f'<0$ בקטע פתוח (a,b)

אזי f יורדת בקטע הסגור $[a,b]$.

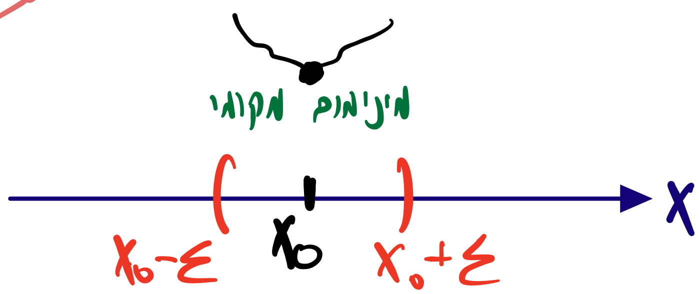
כלומר f יורדת עד כולל הקצוות.

פרק 4 – יישומי הנגזרת

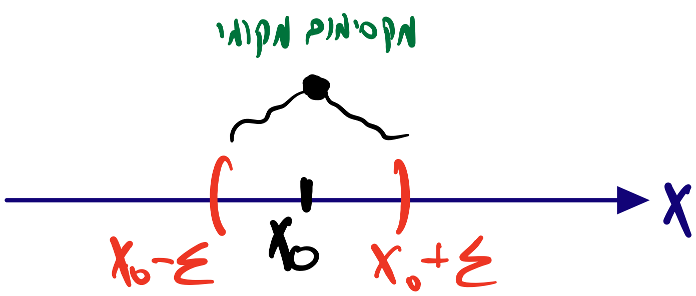
קיצון מקומי – עמוד 228

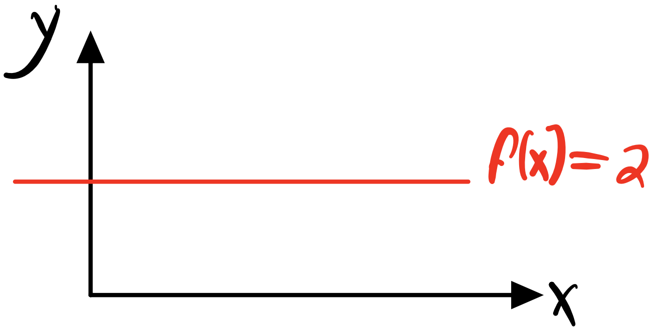
נקודה x_0 תיקרא **מינימום מקומי** אם יש **סביבה** שלה שבה $f(x_0) \le f(x)$

קטע סימטרי פתוח סביב x_0



נקודה x_0 תיקרא **מקסימום מקומי** אם יש **סביבה** שלה שבה $f(x_0) \ge f(x)$





כל נקודה על $f(x)=2$ היא גם מינימום וגם מקסימום?

פרק 4 – יישומי הנגזרת

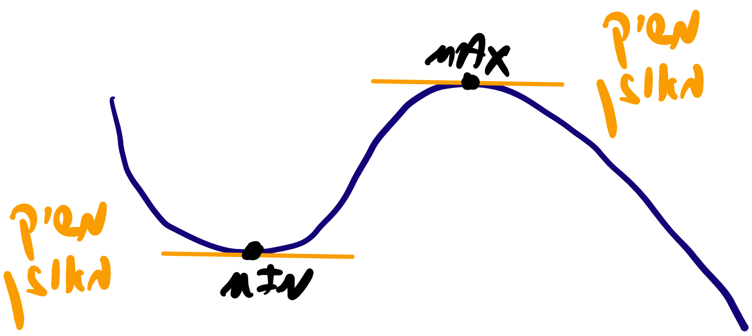
הקשר בין קיצון מקומי בפו' גזירה ובין נגזרת

משפט 4.3.4 עמוד 225

תנאי הכרחי לקיצון מקומי בפונקציה גזירה הוא $f'=0$

$\underbrace{f'=0}_{\text{משיק מאוזן}}$

שיפוע המשיק הוא אפס



למציאת קיצון מקומי נגזור את הפונקציה ונשווה את הנגזרת ל-0

זהו תנאי הכרחי אך לא תנאי מספיק. (נראה בהמשך)

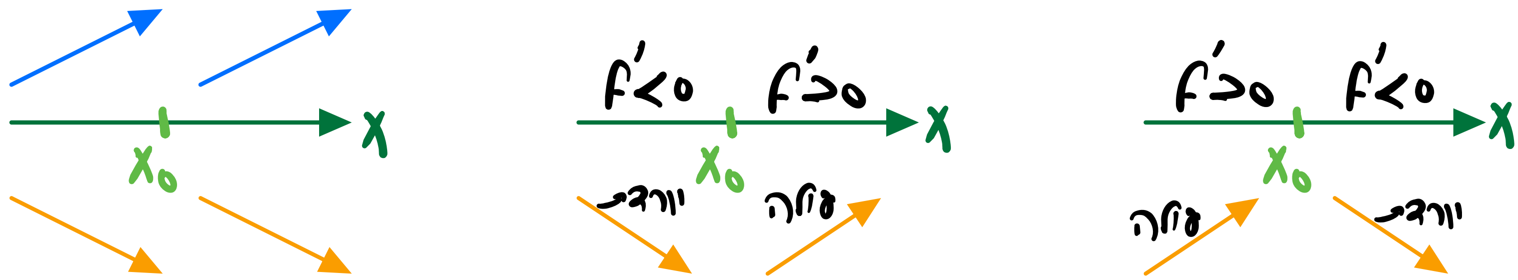
פרק 4 - יישומי הנגזרת

פרישת ממצאים

משפט 4.3.6 עמוד 230

משפט זה מהווה תנאי מספיק לקיצון מקומי.

אם f רציפה בנקודה x_0 ואם יש שינוי במגמות המונוטוניות
אזי x_0 היא קיצון מקומי.



מקסימום מקומי | מינימום מקומי | אין קיצון מקומי

הנקודה x_0 היא נקודת איפוס נגזרת כלומר $f'(x_0)=0$.
מציבים בנגזרת "נציגים" מימין ומשמאל לנקודה x_0 (החשודה כקיצון)
ומקבלים ערכים שליליים או חיוביים בהתאם.
כך בונים פרישת ממצאים ומאפיינים בהם את סוג הקיצון.

נחזור לזה בהמשך...

חקירת פונקציה

בשיעור זה נלמד את הנושאים הבאים:

1. מבוא לנושא
2. סעיפי חקירת פונקציה
   1) תחום הגדרה
   2) נקודות חיתוך עם הצירים
   3) נקודות חשודות כקיצון וסיווגן
   4) תחומי עלייה וירידה
   5) מבחן הנגזרת השנייה
   6) תחומי קעירות וקמירות ונקודות פיתול
   7) שרטוט גרף

<u>חקירת פונקציה – מבוא לנושא</u>

<u>מופיע כשאלה פתוחה אחת במבחן – לפחות.. כלומר לפחות 24 נקודות.</u>

<u>מבוא:</u>

בתרגילים מסוג זה נקבל פונקציה ונתבקש "לחקור" אותה. בסוף תהליך החקר נשרטט גרף מדויק של פונקציה זו.

<u>איך נבצע?</u>

על ידי חקר התכונות השונות של הפונקציה.

נעביר את הפונקציה סדרת בדיקות כאשר כל בדיקה תוסיף לנו פרטים עליה. לבסוף נרכיב אותם יחד ונצייר גרף.

התהליך סדור. ברור. וידוע מראש.

עובדים לפי הסעיפים שבעמודים הבאים: (במידה וביקשו. לא תמיד נצטרך את כולם...)

מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה:

הסבר: נחפש מהם האיקסים (חומרי הגלם) אותם הפונקציה יכולה לקבל ומהם אותם איקסים שאותם הפונקציה אינה יכולה לקבל.

בקורס שלנו ישנן 3 בדיקות שיש לבצע: (במידה ומופיעות)

1. **מכנה חייב להיות שונה מ-0.**

אם יש מכנה בפונקציה, ניקח **את כולו כיחידה אחת** ונכתוב "שונה מ-0" כך:

$$f(x)=\frac{2}{x-3}\rightarrow x-3\neq 0\rightarrow x\neq 3$$

מסקנה: המשתנה x יכול להיות כל מספר חוץ מ-3.

---

2. **ביטוי בתוך שורש חייב להיות חיובי או אפס.**

אם יש $\sqrt{\ }$ בפונקציה נדרוש **שכל הביטוי שבתוכו, כיחידה אחת**, יהיה גדול או שווה ל-0:

$$f(x)=\sqrt{x-3}\rightarrow x-3\geq 0\rightarrow x\geq 3$$

מסקנה: המשתנה x יכול להיות כל מספר שגדול או שווה ל-3.

---

3. **ביטוי בתוך לוג חייב להיות חיובי. (לוג בבסיס כלשהו)**

אם יש לוג בפונקציה, נדרוש שהביטוי שמוכנס אליו, **כולו, כיחידה אחת**, יהיה חיובי:

$$f(x)=log(x-3)\rightarrow x-3>0\rightarrow x>3$$

הערה חשובה: תחום ההגדרה שקיבלנו תקף לכל אורך התרגיל. (בכל הסעיפים! וכמובן גם בגרף)

<u>מציאת נקודות החיתוך עם הצירים:</u>

1. **<u>חיתוך עם ציר x:</u>** נשווה את הפונקציה ל- 0. <- $\boldsymbol{f(x)=0}$ **ואז פותרים... מקבלים** $\boldsymbol{x_1, x_2 \dots x_k}$

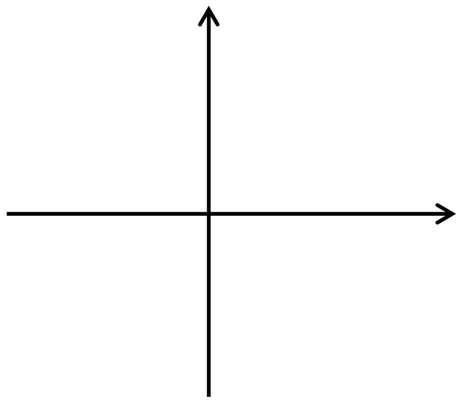
ואז הנקודות הן $(x_1, 0), (x_2, 0) \dots (x_k, 0)$.

<u>הסבר:</u> מחפשים את הנקודות בהן גובה הפונקציה הוא 0.

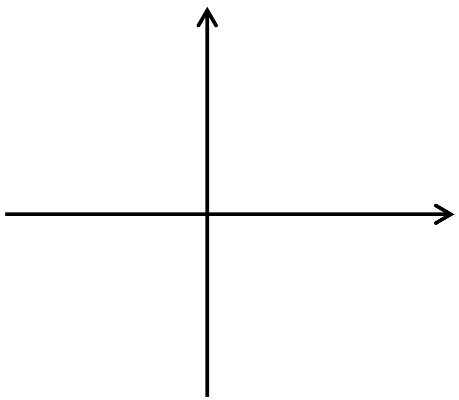
2. **<u>חיתוך עם ציר y:</u>** נציב במקום x את המספר 0. <- $\boldsymbol{f(0)=\cdots}$ **מקבלים תוצאה שהיא גובה החיתוך**

ואז הנקודה היא $(0, y_1)$. כזו נקודה יש במקסימום אחת.. או שאין בכלל.

3.



חיתוך עם ציר x

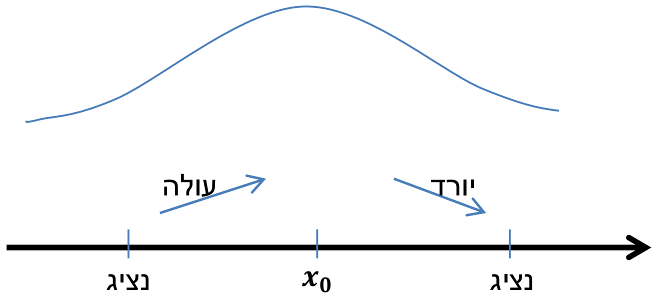


חיתוך עם ציר y

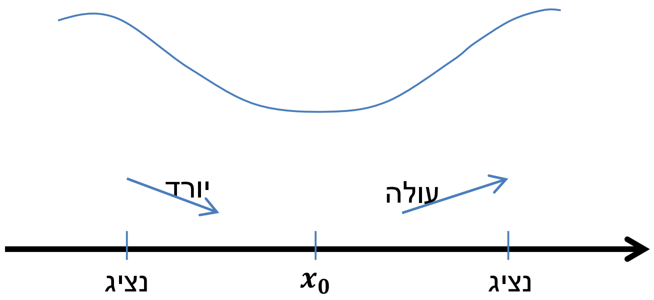
<u>מציאת נקודות חשודות כקיצון וסיווג</u>

נצייר משיקים

<u>הגדרה: נקודת קיצון היא נקודת שבה יש החלפת מגמת מונוטוניות.</u>



החלפה כזו מגדירה נקודת max



החלפה כזו מגדירה נקודת min

<u>מה עושים:</u>

1. גוזרים את הפונקציה הנתונה על פי חוקי הנגזרות, משווים את הנגזרת שקיבלנו ל-0 ופותרים את המשוואה. מקבלים את שיעורי ה-x של הנקודות החשודות כקיצון. "תנאי הכרחי לקיצון מקומי הוא משיק מאוזן."

$f'(x) = 0$ פותרים... ומקבלים חשודות $x_1, x_2 \dots x_k$

אם $f'(x) \neq 0$ אז אין קיצון מקומי.
כלומר הפונקציה:
עולה לכל x / יורדת לכל x

2. מציבים בנגזרת **<u>"נציגים"</u>** מימין ומשמאל. מקבלים את המגמה – עלייה או ירידה.

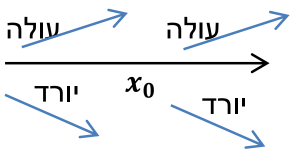
אם קיבלנו תוצאה <u>חיובית</u> $f'(x) > 0$ – המגמה באותו תחום היא <u>מגמת עלייה</u>.

אם קיבלנו תוצאה <u>שלילית</u> $f'(x) < 0$ – המגמה באותו תחום היא <u>מגמת ירידה</u>.

<u>נשים לב:</u>

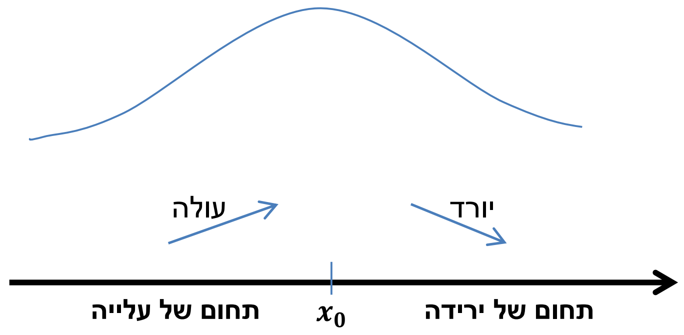
<u>שינוי במגמת מונוטוניות מגדיר קיצון מקומי.</u>

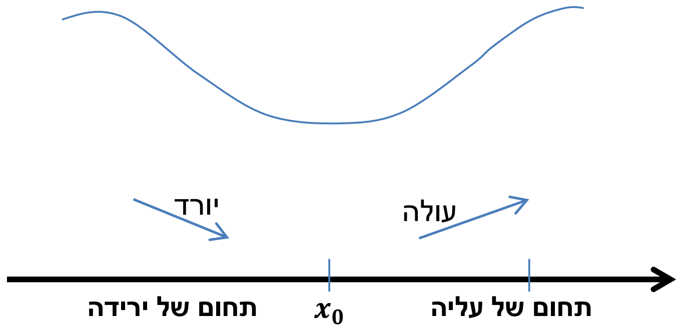
<u>כלומר אם **אין** שינוי הנקודה **לא** קיצון מקומי.</u>



מצבים כאלה הם לא קיצון

מציאת תחומי עלייה וירידה





נסתכל שוב על הממצאים שקיבלנו בחיפוש נקודות הקיצון ונגדיר את התחומים בהם יש עליה וירידה.

__נראה דוגמא:__ מצא נקודות קיצון לפונקציה הבאה:

$$\boldsymbol{g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 2}$$

מבחן הנגזרת השנייה

רואים שמציאת קיצון עוזרת לנו גם לדעת את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה...

דרך נוספת לאפיון סוג הקיצון הוא "מבחן הנגזרת השנייה".

מה עושים?

גוזרים שוב את הפונקציה ומציבים את הנקודות החשודות שקיבלנו כאשר פתרנו $f'(x) = 0$.

אם $f'(x_1) = 0$ וגם $f''(x_1) > 0$ אז הנקודה החשודה היא נקודת מינימום.

אם $f'(x_1) = 0$ וגם $f''(x_1) < 0$ אז הנקודה החשודה היא נקודת מקסימום.

נזכור:

על מנת למצוא את שיעורי ה- y של נקודות הקיצון, נציב את שיעורי ה- x שלהן, אותם מצאנו, **בפונקציה המקורית הנתונה בתרגיל**.
לדוגמא נקבל $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ וכו'.

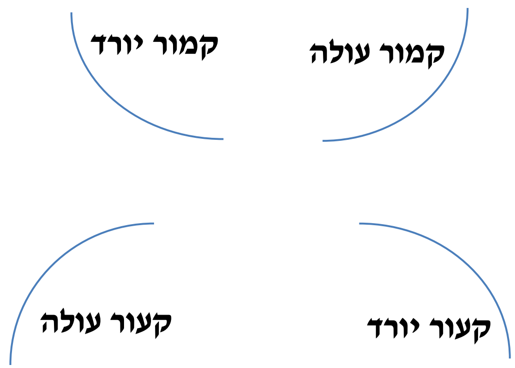
$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$$

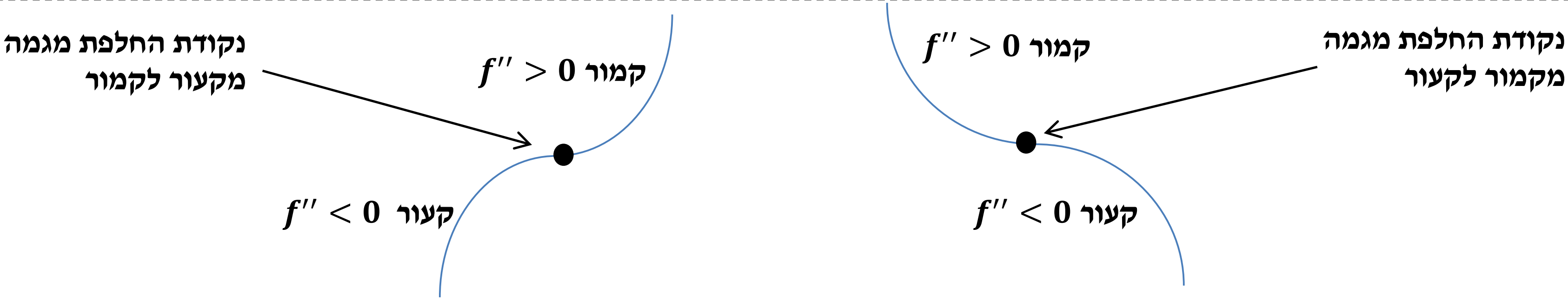
<u>מציאת תחומי קעירות וקמירות ונקודות פיתול</u>

נבדוק אם הנגזרת השנייה גדולה או קטנה מ-0 :

בתחומי ה-x שבהם $f''(x) > 0$ הפונקציה <u>קמורה</u> כלומר בצורה כזו ' $\cup$ '

בתחומי ה-x שבהם $f''(x) < 0$ הפונקציה <u>קעורה</u> כלומר בצורה כזו ' $\cap$ '





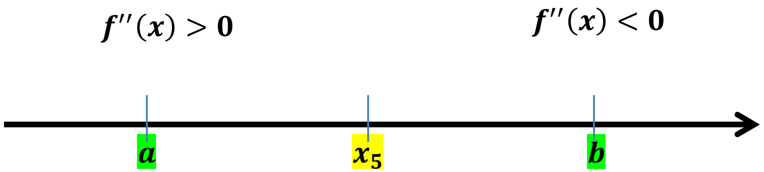
נקודה בה הגרף מחליף מגמת קמירות/קעירות תיקרא <u>נקודת פיתול</u>.

<u>משפט: תנאי הכרחי לפיתול הוא $f'' = 0$. נקודה שמקיימת זאת תיקרא חשודה כפיתול.</u>

כלומר אם $f''(x_5) = 0$ אז x_5 חשודה כפיתול.

<u>מציאת תחומי קעירות וקמירות ונקודות פיתול</u>

במקרה ומצאנו נקודות כאלה, נבדוק נציגים מימין ומשמאל לנקודה. (כמו במציאת תחומי עלייה וירידה אבל הפעם נציב **<u>בנגזרת השנייה</u>**(!)).
במידה ויש החלפת סימן מקעירות לקמירות או מקמירות לקעירות, נגיד שזו <u>נקודת פיתול</u>.



אם כך – אכן x_5 היא נקודת פיתול.

<u>הערה חשובה:</u>

ישנן נקודות פיתול בהן $f' = 0$ אבל זה לגמרי לא הכרחי. כן חובה ש $f'' = 0$

<u>שרטוט גרף</u>

נשרטט מערכת צירים <u>גדולה וברורה עם שנתות</u>, נציג בה את כל הממצאים שאספנו ונשרטט גרף מלא.

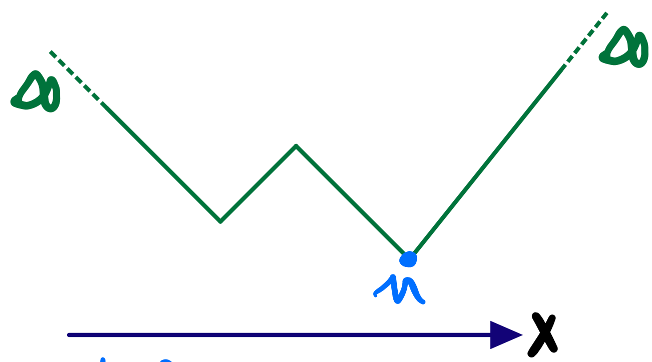
מה למדנו בשיעור

1. מבוא לנושא
2. סעיפי חקירת פונקציה
   1) תחום הגדרה
   2) נקודות חיתוך עם הצירים
   3) נקודות חשודות כקיצון וסיווגן
   4) תחומי עלייה וירידה
   5) מבחן הנגזרת השנייה
   6) תחומי קעירות וקמירות ונקודות פיתול
   7) שרטוט גרף

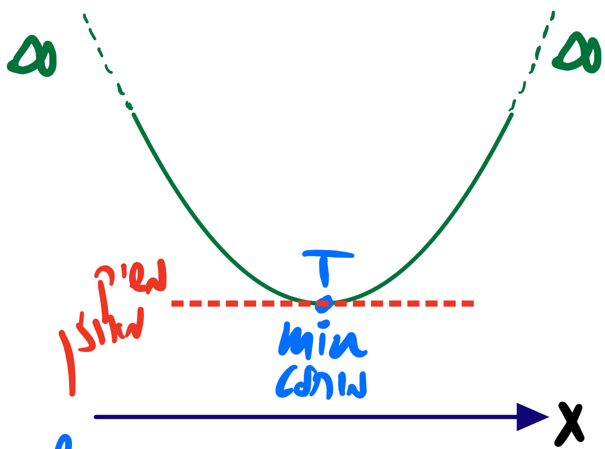
פרק 4 - יישומי הנגזרת

קיצון מוחלט בתחום כללי

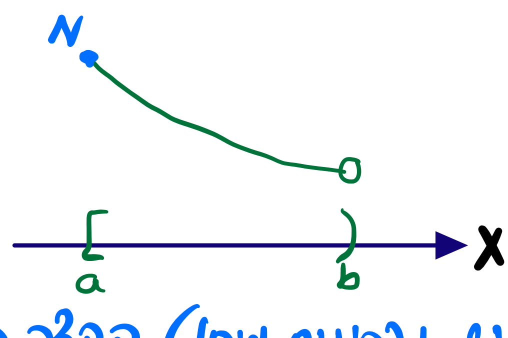
סרטון 4.6 עמוד 207



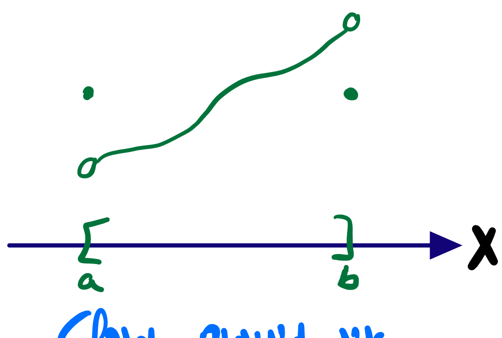
יש מינימום מוחלט (מ" בשפיץ)
אין מקסימום מוחלט



יש נקודה הכי נמוכה בגרף.
אין נקודה הכי גבוהה בגרף.



יש מקסימום מוחלט בקצה הקטע
אין מינימום מוחלט



אין מינימום מוחלט
אין מקסימום מוחלט

כל האופציות אפשריות...

פרק 4 - יישומי הנגזרת

קיצון מוחלט בתחום סגור

הגדרות:

נקודה x_0 תיקרא מקסימום מוחלט של $f(x)$ בקטע מסוים, אם $f(x_0) \geq f(x)$ לכל x, בקטע.

נקודה x_0 תיקרא מינימום מוחלט של $f(x)$ בקטע מסוים, אם $f(x_0) \leq f(x)$ לכל x, בקטע.

השאלה הנשאלת היא:

האם ישנם תנאים שבהם מובטח לנו שיהיה קיצון מוחלט?

משפט: קיצון מקומי **יחיד** הוא מוחלט!

יש עוד...

פרק 4 – יישומי הנגזרת

חשוב
מופיע ברוב
המבחנים

קיצון מוחלט בקטע סגור

משפט 4.6.4 בעמוד 248

משפט ערך הקיצון – תנאי מספיק לקיצון מוחלט

> אם $f(x)$ רציפה בקטע סגור $[a,b]$
> אז יש לה קיצון מוחלט (גם max וגם min) בקטע.

בעברית:

אם יש פונקציה שהיא רציפה בתוך קטע סגור כלשהו...

לדוגמה: x^2+4 ב- $[3,5]$ {זה נכון בכל פולינום}

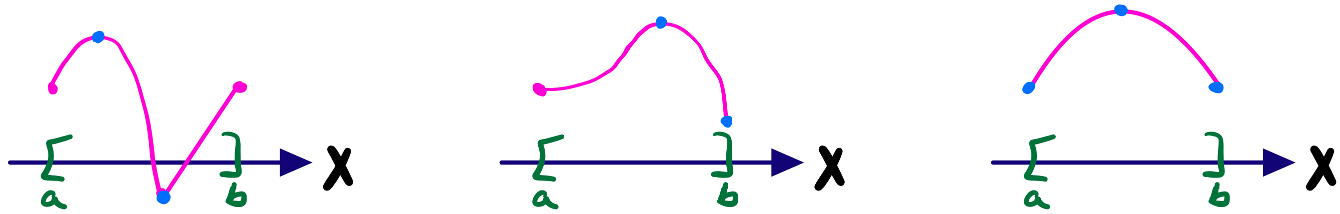
$\sin x+3$ ב $[0,\pi]$ {זה נכון בכל טריגו}

אז בוודאות יש לה max מוחלט וגם min מוחלט באותו הקטע.

איפה יהיה הקיצון הזה? איך נמצא אותו?

1. קצוות הקטע $[a,b]$ ← מציבים קצוות בפונקציה ומקבלים $f(a), f(b)$
2. נקודות שבהן הנגזרת מתאפסת ← $(f'=0)$ ← גוזרים ומשווים ל-0
3. נקודות שבהן הנגזרת לא קיימת ← נקודות "חשודות" במקרה "הגבולי" אם הן

3 חשודות



פרק 4 – יישומי הנגזרת

חשוב
מופיע ברוב
המבחנים

קיצון מוחלט בקטע סגור

שיטת עבודה לשימוש במשפט ערך הקיצון:

1. זיהוי:

הפונקציה רציפה בקטע הסגור עליו שואלים
מבקשים להוכיח שיש קיצון מוחלט / מקסימום/מינימום מוחלטים
שואלים אם יש קיצון מוחלט / מקסימום/מינימום מוחלטים

2. בונים רשימה של נקודות חשודות כקיצון – "ש"ס של חשודות":

1. לוקחים את קצוות הקטע עליו שואלים. מכניסים לרשימה.
2. אם הפונקציה גזירה, גוזרים אותה ומשווים לאפס.
פותרים ומקבלים נקודות חשודות כקיצון.
אם נקודות אלה נמצאות בקטע עליו שאלו, מכניסים אותן לרשימה.
3. אם יש נקודות בהן הנגזרת לא קיימת, והנקודות אלה נמצאות בקטע עליו שאלו, מכניסים אותן לרשימה.

ש"ס חשודות (נקודה בה הנגזרת לא קיימת , נקודת איפוס נגזרת , נקודת איפוס נגזרת , נקודת קצה ימני , נקודת קצה שמאלי)

3. רצבה בפונקציה:

מציבים בפונקציה את כל הנקודות שמצאנו ומקבלים גבהים בהתאמה.
הנקודה / הערך הגבוה ביותר – מקסימום מוחלט
הנקודה / הערך הנמוך ביותר – מינימום מוחלט

פרק 4 - יישומי הנגזרת

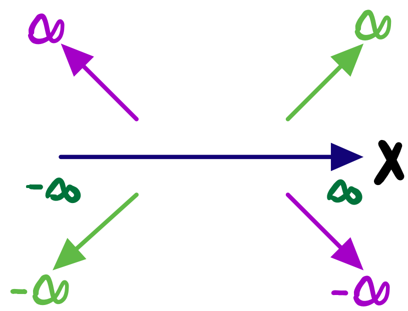
קיצון מוחלט בקטעים לא סגורים

חשוב
מופיע ברוב
הבחינות

שאלות 4.6.2+4.6.3 בעמודים 252-253

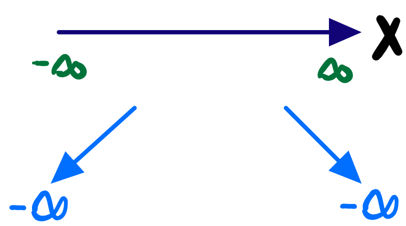
השאלות מאפשרות לדעת שיש קיצון מוחלט במספר מקרים נבחרים.
כאשר הפונקציה רציפה לכל x בקטע.
כמובן, הקטע עליו מסתכלים לא סגור. הקטע שמוצג כאן הוא $(-\infty,\infty)$

מה עושים? **מחשבים גבולות בהתקרבות אל קצוות הקטע**



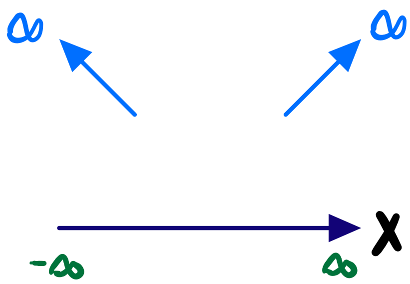
$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty \qquad \lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$$

אין מינימום מוחלט
אין מקסימום מוחלט



$$\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

אין מינימום מוחלט
יש מקסימום מוחלט



$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$$

יש מינימום מוחלט
אין מקסימום מוחלט

פרק 4 - יישומי הנגזרת

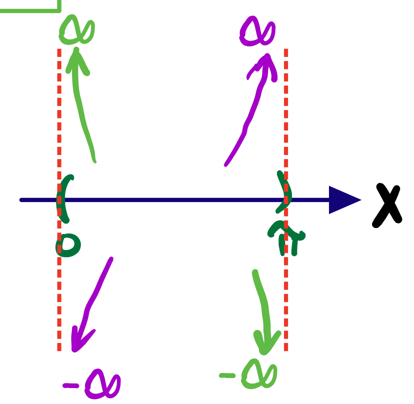
קיצון מוחלט בקטעים לא סגורים

חשוב
מופיע ברוב
המבחנים

בבגרות 4.6.2+4.6.3 בעמודים 252-253

הבגרות מאפשרות לדעת שיש קיצון מוחלט במספר מקרים נפוצים.
כאשר הפונקציה רציפה לכל x בקטע.
כמובן, הקטע עכשיו מתעניינים לא סגור. הקטע שמופיע כאן הוא $(0,\pi)$

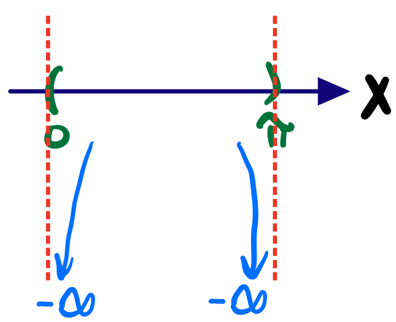
מה עושים? **מחשבים גבולות בהתקרבות אל קצוות הקטע**



$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to \pi^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to \pi^-} f(x) = \infty$$

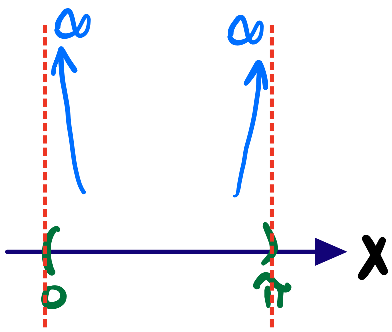
אין מינימום מוחלט
אין מקסימום מוחלט



$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to \pi^-} f(x) = -\infty$$

אין מינימום מוחלט
יש מקסימום מוחלט



$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to \pi^-} f(x) = \infty$$

יש מינימום מוחלט
אין מקסימום מוחלט

פרק 4 – יישומי הנגזרת

חשוב
מופיע ברוב
המבחנים

קיצון מוחלט בקטעים לא סגורים

בדוגמאות 4.6.2+4.6.3 בעמודים 252-253

1. זיהוי:

- הפונקציה רציפה בקטע הפתוח עליו שואלים
- מבקשים להוכיח שיש קיצון מוחלט/מקסימום/מינימום מוחלטים
- שואלים אם יש קיצון מוחלט/מקסימום/מינימום מוחלטים

2. מבחינים בין ארבע אופציות:

אופציה א' - הקטע $(-\infty,\infty)$

מחשבים גבולות ב-$\pm\infty$ ונעזרים בדוגמאות 4.6.2+4.6.3

אופציה ב' - הקטע (מספר,מספר)

מחשבים גבולות משמאל ומימין המתאים ונעזרים בדוגמאות 4.6.2+4.6.3

אופציה ג' - הקטע $(-\infty,$מספר$)$

מחשבים גבולות ב-$-\infty$ ומשמאל ונעזרים בדוגמאות 4.6.2+4.6.3

אופציה ד' - הקטע $($מספר$,\infty)$

מחשבים גבולות ב-$+\infty$ ומימין ונעזרים בדוגמאות 4.6.2+4.6.3

3. הסבר מילולי:

מסבירים בקצרה מה עשינו וכותבים מסקנה מסודרת.

פרק 4 – יישומי הנגזרת

חשוב
מופיע ברוב
המבחנים

משפט רול

סעיף 4.9.1 עמוד 277

אם:

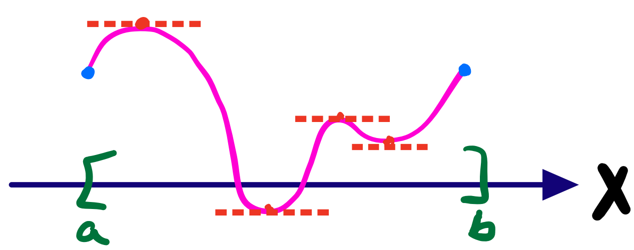
1. $f(x)$ רציפה בקטע סגור $[a,b]$ {נתון או לפי אריתמטיקה}
2. $f(x)$ גזירה בקטע פתוח (a,b) {אין "שפיצים"}
3. $f(a)=f(b)$ {הגובה בקצוות הקטע שווה}

אז:

יש נקודה c בקטע (a,b) כך ש $f'(c)=0$.

ניסוח נוסף

יש נקודה c כך ש $a<c<b$ שבה הנגזרת מתאפסת.



הערה: יש לפחות נקודה אחת כזאת, שמאפסת את הנגזרת.

פרק 4 - יישומי הנגזרת

חשוב
מופיע ברוב
המבחנים

משפט רול

<u>הגרסה הפרקטית</u>-הגובה בקצוות הוא אפס.

<u>אם:</u>

1. $f(x)$ רציפה בקטע סגור $[a,b]$ {נתון או לפי אריתמטיקה}
2. $f(x)$ גזירה בקטע פתוח (a,b) {אין "שפיצים"}
3. $f(a)=f(b)=0$ {הגובה בקצוות הקטע הוא אפס}

<u>אז:</u>

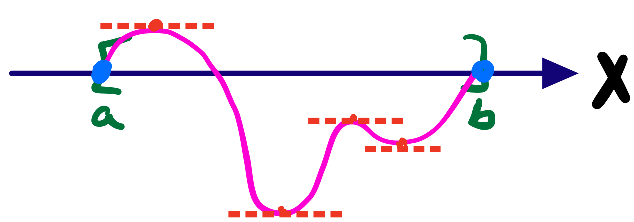
יש נקודה c בקטע (a,b) כך ש $\underline{f'(c)=0}$.

<u>מסקנות:</u>

א. בין שני שורשים עוקבים של $f(x)$, יש לפחות שורש אחד לנגזרת.

ב. בין כל שתי נקודות התאפסות עוקבות של הפונקציה, הנגזרת מתאפסת לפחות פעם אחת.

$f(a)=f(b)=0$



פרק 4 – יישומי הנגזרת

חשוב
מופיע ברוב
המבחנים

משפט רול

הגרסה הפרקטית- הנגזרת בקצוות היא אפס.

1. זיהוי:

א. שואלים כמה "שורשים"/"פתרונות" יש למשוואה/לפונקציה

ב. מבקשים להוכיח שיש "בדיוק"/"מקסימום"/"לכל היותר" X "שורשים"/"פתרונות"

2. פונקציית עזר:

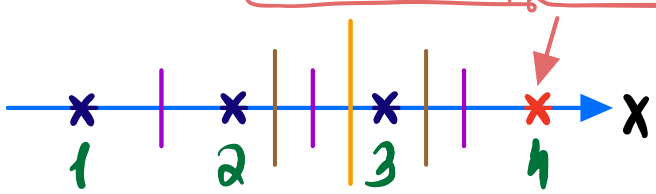
מגדירים כאשר אין לנו פונקציה- נגדיר פונקציה

3. הנחה בשלילה

מניחים בשלילה שהשורש הבא כן קיים.

לדוגמא: מבקשים להוכיח שיש המקסימום 3 שורשים לפונקציה:

מניחים בשלילה שקיים שורש רביעי



| נגזרת ראשונה חייבת להתאפס 3 פעמים

| נגזרת שנייה חייבת להתאפס 2 פעמים

| נגזרת שלישית חייבת להתאפס 1 פעמים

גוזרים 3 פעמים ומראים שקיבלנו סתירה ולכן הוכחנו שיש מקסימום 3 שורשים.

הנחת השלילה נופלת...