

אינטגרלים

הערכת אינטגרל – מגיעים לתשובה "בערך"
(נושא יותר חשיבתי אבל גם טכני)

חישוב אינטגרל – מגיעים לתשובה מדויקת
(נושא טכני)

התכנסות/התבדרות של אינטגרל
"אינטגרל מוכלל"

משפט 5.6.7
הערכת האינטגרל

מבחן השוואה
להתכנסות
אינטגרלים
מוכללים

אינטגרל הרמוני p

"אינטגרל מסוים"
(חישוב פונקציה קדומה + חישוב נוסף)

"אינטגרל לא מסוים"
(חישוב פונקציה קדומה)

חישוב שאינו שטח

חישוב שטח

חישוב שלא עונה על
ההגדרה של שטח

הגדרת השטח

המשפט היסודי של
החשבון האינטגרלי

שיטת ההצבה

אינטגרציה בחלקים

אינטגרלים "מידיים"
(מתור רשימה)

שיטת ההצבה

אינטגרציה בחלקים

אלגוריתם לחישוב אינטגרל

פרקי אינטגרלים

האינטגרל הוא מסוים - חישוב פונקציה קבועה

הגדרה:

הפונקציה $F(x)$ ניקרא פונקציה קבועה אם פונקציה נגזרת $F'(x)$,
 אם $F'(x) = F(x)$ לכל x האגדר בתחום של $F(x)$.

מקור המושג פונקציה "קבועה" הוא מתוך שהפונקציה מקבלת נגזרת של $F(x)$,
 ומשמע מתן של $F(x)$ קובעת $F(x)$.
 אם כך - אינטגרל = פונקציה הפוכה למקור.

כתיב:

אם $F(x)$ היא פונקציה קבועה של $F(x)$,
 אז כל פונקציה מהצורה $F(x) + C$ ^{מגד} היא פונקציה קבועה שלה.

הסקנה:

אם מצאנו שתי קבועות שונות אז הן נבדלות אחת מהשנייה ב- C .

פרקי אינטגלים

האינטגרל הוא מסוים - חישוב פונקציה קבועה

משפט:

אם $f(x)$ רציפה בקטע I אז יש לה קבועה בקטע I

תהיך I - פונקציה קבועה נקרא "אינטגרל".

סיכום:

כלאן מסוים זה
אינטגרל
"לא מסוים"

$$\int f(x) dx$$

חשובה היא
הפונקציה הקבועה

מציין את המשתנה
שבו מסוים את האינטגרל

כתיב אינטגרים

כתיב אינטגרציה הפיסיים - השתתף אינטגרים יסודיים/מקסימום

נוסחאות אינטגרציה - עמוד 299 אלה 5.2.1

האלה תהיה היא הולך א האינטגרים.

אינטגרל	פונקציה קדומה
$\int adx =$	$ax + C$
$\int x^n dx =$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\int (ax + b)^n dx =$	$\frac{(ax + b)^{n+1}}{(n+1)a} + C$
$\int \sin x dx =$	$-\cos x + C$
$\int \cos x dx =$	$\sin x + C$
$\int -\sin x dx =$	$\cos x + C$
$\int -\cos x dx =$	$-\sin x + C$

אינטגרל	פונקציה קדומה
$\int e^x dx =$	$e^x + C$
$\int e^{mx} dx =$	$\frac{1}{m} e^{mx} + C$
$\int e^{-x} dx =$	$-e^{-x} + C$
$\int \frac{1}{x} dx =$	$\ln x + C$
$\int \frac{1}{ax + b} dx =$	$\frac{1}{a} \ln ax + b + C$
$\int \frac{1}{x^2 + 1} dx =$	$\arctan x + C$
$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx =$	$\frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$

הפונקציה היא מספר אלה.

כתיב אינטגרלים

כללי אינטגרציה בסיסיים - רשימת אינטגרלים יסודיים/מקובלים

כללים בסיסיים:

$$\int a \cdot f(x) dx = a \cdot \int f(x) dx$$

a הוא מספר (קבוע כפול) \rightarrow $a \cdot f(x)$
 הקבוע יוצא החוצה \rightarrow $\int f(x) dx$

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$$

כתיב בין פונקציות, הערך האינטגרל, אותו מפרוק למני אינטגרלים
ולחבר יוצאים.

כתיב בין פונקציות, הערך האינטגרל, אותו מפרוק למני אינטגרלים
ולחסר יוצאים.

הערה קריטית: בסוף ובחלקן אסור מפרוק! ∇

פרקי אינטלים

גאומטריה: הוכחה באינדוקציה

בטור $1, 3, 5, 7, \dots$ נרשם שם אחד במקום הביטוי " $2n-1$ " שיהיה.

הביטוי " $2n-1$ " הוא האורח של "החוק" אותו נרשם (איננו חייבים).

5 שאלות עבודה:

1. בחינת ההוכחה: נרשם שם אחד במקום הביטוי " $2n-1$ ".
או שנהצ הצבה למילה מתן נסין. לרוב נרשם יהיה x .

2. גורמים: נרשם $2n-1$ שם אחד במקום הביטוי " $2n-1$ ".
בפתיחה של אות שמה.

3. ביצוע ההוכחה: נרשם $2n-1$ שם אחד במקום הביטוי " $2n-1$ ".
במנחה המרנה החג.

4. ביצוע האינדוקציה: נרשם $2n-1$ שם אחד במקום הביטוי " $2n-1$ ".

5. חזרה לשמה המקורי: נרשם $2n-1$ שם אחד במקום הביטוי " $2n-1$ ".
ע"י ביטוי פשוט, הוכחה, נוסף x וקיבלנו את הקבוצה.

חזרה ושאלה:

חובה לתצור לשמה המקורי כי תצ"י ביקש קבוצה ב-X.

פרקי אינטגרלים

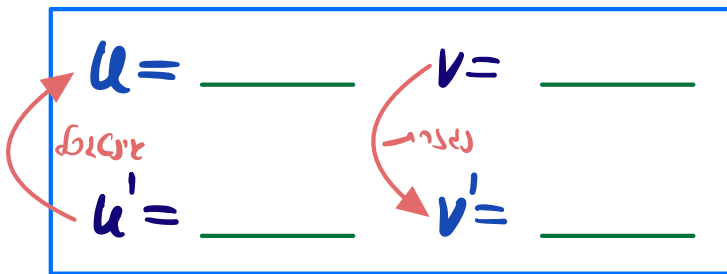
זינאציה מתקנים

משתמשים בשיטת זינאציה של פונקציות היתוך האינטגרל (לפעמים אחרי הלבנה).

הנוסחה:

$$\int \underbrace{u'}_{\text{נהיין}} \cdot \underbrace{v}_{\text{תוצאה}} = u \cdot v - \int u \cdot v'$$

סדר בחירה:



1. נבנה תיקוא של u פונקציות:

כאלו אשר הפונקציות הובטחה שלן תיקוא u והפניה v .
נשים לב!

הקשר בין u ל- u' הוא ביצוע אינטגרל.
 הקשר בין v ל- v' הוא ביצוע נגזרת.

2. הוצבה נוסחה והישג האינטגרל:

נציה את הפונקציות שבחרנו, היתוך הנוסחה ונחשב אינטגרל כרגיל.
הערה:

א ישן תמיד u אפשריות תהיות u' ו- v .
 א נבחר היתוך לתיקוא או לתיקוא אחר.

א ברוב התיקואים, כאלו הפונקציות היא פונקציה, נשאל אחר אורה כ- v .
 א האינטגרלים שפעלים \arctan או \ln , תמיד נשתמש באינטגרלים.
 והם יהיו v

פרקי אינטגלים

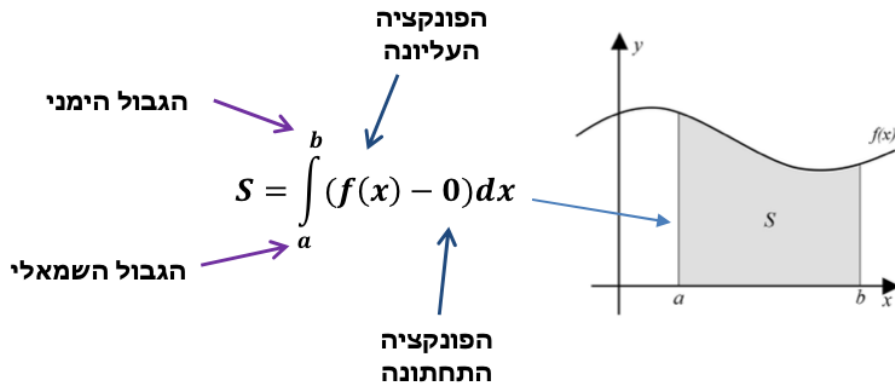
הינטזאם הוטוים - העייר הסאח

נטה פונקציה $f(x)$ והאצאלה "הוטוים" עבורה יסוון כן:

$$\int_a^b f(x) dx$$

גבל ימני $\rightarrow b$
גבל שמאלי $\rightarrow a$

האצאלה הוטוים נטש אונו לחישוב סאח בין פונקציו. (כין הסאר)
חישוב סאח ככה נהולום האמצו "הגמת הסאח" כן:



כהו הסאח חלוא נטח - זולל פונקציה הנטנה וולא ציר x בקאץ $[a, b]$
ובאופן סלי סאח בין פונקציו - חושב כן:

$$S = \int_a^b (\text{פונקציה תחתונה} - \text{פונקציה עליונה}) dx$$

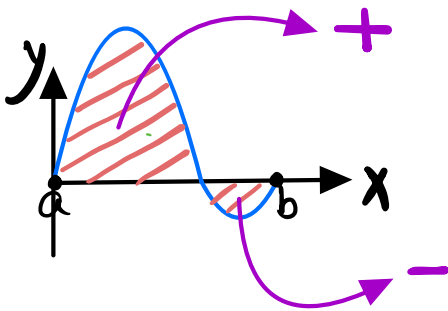
הערה חשובה: כן אינולו סאח חושבה רכי ההגמה - לא נטש סאח!

כתיב אינטגרלים

הינטגראל הוטאים - תוצאות אפריורי + וטעם

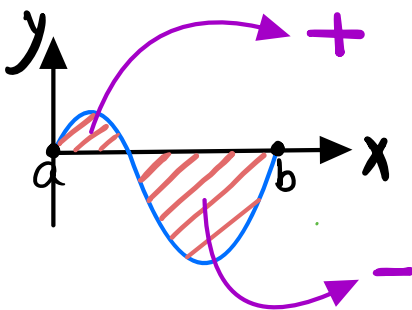
אם השטח בהגרת השלח ← התוצאה הייגה להיות חיובית.

אם $\int_a^b f(x) dx$ השטח בהגרת השלח חיובי



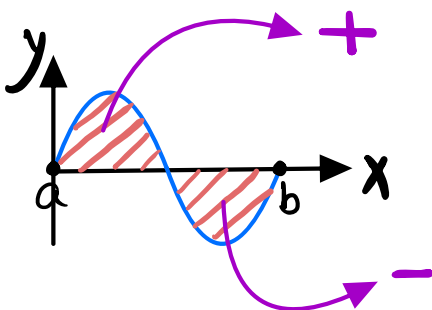
תוצאה חיובית
 הוב התנה נמצא מלא לזכיר א
 התינוס גבל יותר וכן התיוצאה חיובית.

$\int_a^b f(x) dx$



תוצאה שלילית
 הוב התנה נמצא מלא לזכיר א
 התינוס גבל יותר וכן התיוצאה שלילית.

$\int_a^b f(x) dx$



תוצאה אפס
 התתחים מלא ותיגה לזכיר א שונים
 התינוס מקבל אג התינוס וכן יוצא אפס.

כתיב אינטגרלים

חוק חלפה הגבולות:

מתייבוא גבולות
אזיסימ איוניס

$$\int_p^q f(x) dx = - \int_q^p f(x) dx$$

הנה געניס

פרקי אינטגרלים

השטח היסודי של המשבץ האינטגרלי

השטח מציג את הקשר בין אינטגרל ואינטגרל. זהו, בעצם, הפיכה ההפוכה לחישוב אינטגרלים ואינטגרלים.

אם $f(x)$ רציפה ו- $F(x)$ קבוצה שלה בקטע $[a, b]$ אז:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

סיכום:

שטח המשבץ - גודל קבוצה

שטח שני - פונקציה סוגריוס המבנה כזה:

$$\left(\int_a^b f(x) dx \right) - \left(\int_a^b g(x) dx \right) = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

משבץ אחד
 משבץ שני

משבץ אחד
 משבץ שני

פרקי אינטלים

גיל הרצבה הינאס מוים

בט"ר זו נציה למטה אחר במוקם ביאוי "מט"ר" לשהו.

הביאוי ה"מט"ר" הוא הארם ש"החיק" אורו משיא (אינ' האיגויים).

4 שתי עבודות:

1. בחיור החצבה: נציה למטה במוקם הביאוי ה"מט"ר".
או שנהצ הצבה למאה מן נטיו. לחוב המטבה יהיה ז.
נאר א- המלו- המטבה הין מחג לפי מווא החצבה → מספר

2. גולחים: נצור ל צב לפי המטבה שלו ונצמיד לו
בפנציל מאים.

3. ביצת החצבה: נחמל א- הינאס החקורי בינארל חג
במנחי המטבה החג.

4. ביצת הינאס: נחמל א- הינאס לפי הינאס היגויים.

הנחוי המבור:

אין כן תורה למטה החקורי. מחמלים כן תשובה ומפריג וטינו.
אם המלו- בקיבולנו במטבה החג מוים, אז המטבה היא אפס.

פרקי אינטגרלים

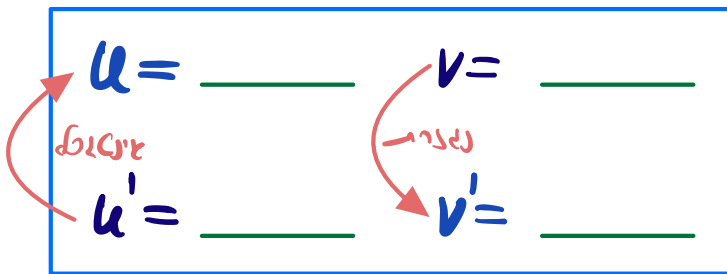
זינאציה בתנאים באינטגרל וטוים

משתמשים בשיט וטוים של פונקציות היתוך באינטגרל. (לפעמים אחרי הצבה).

$$\int_a^b u'v = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b uv'$$

הנוסחה:

סדר חשוב:



1. נבנה תיקוא של u פונקציות:

כאלו אשר הופקציות הוטפלו שלן תיקוא u והפניה v .
שים לב!

הקטר בין u ל- u' הוא ביזום זינאט.
 הקטר בין v ל- v' הוא ביזום גזירה.

2. הצבה בנוסחה והישוב הזינאט:

נציה את הפונקציות שבוקרו, היתוך הנוסחה ונחסה זינאט כרגיל.
הערה:

א ישן תיג u אפשרייה תהייה $u' - v$.

א נבחר היתוך לניסיון או לניסיון אחר.

א הריב התיקרים, כשאת הפונקציות היא פנינים, נאלץ לחזור אותה כ- v .

א באינטגרלים שפעלים \arctan או \ln , תיג נחמה בא. התיקרים.
 והם יהיו v

פרקי אינטרולים

שלוש התיישובים של הפונקציות

3 שלבי עבודה:

1. הזגרה הסגורה

סגורה = אינז'ר של גבול עמוק (ימני), גבול רחוק (שמאלי) של הפונקציה והגבול.
והמכונה "פונקציה עיונה פתוחה" פונקציה רחוקה.

2. חישוב האינטרולים

לחשב את רשימת האינטרולים וסגורים/שלישי/חלופה/א. כחלקים, ונקודות את הקבוצה $F(x)$.

3. שימוש במשפט היסודי של החשבון האינטגרליים

לציינים בפונקציה הקבוצה את ערכי הקצה של הקטע הנשקף, קובים את העליון ואת התחתון, ונבצעים חישוב בין שני הצדדים חלופה לקבלת הפונקציה.

פרקי אינטלים

אינטל של פונקציה אי זוגית

אינטל של פונקציה אי זוגית — הקצו סימני שווה אפס ∇

פונקציה אי זוגית היא פונקציה המקיימת את ההגדרה הבאה:

$$f(x) = -f(-x)$$

לבים חשובים — פונקציה אי זוגית:

1. גרפיקים אר פונקציה זוגית שגוף של פונקציה.
2. נציבים הפונקציה, במקום x , את $-x$, האף יתן של פונקציה.
- אם קיימן אולא ביאוי עם סימן מנוגד אז הפונקציה היא אי זוגית.

זוגיות/אי זוגיות של פונקציה

פונקציה אי זוגית

פונקציה אי זוגית היא פונקציה המקיימת את המשוואה הבאה:

$$f(x) = -f(-x)$$

לדוגמא:

נתונה הפונקציה: $f(x) = |x| \cdot \sin x$
 בדקו האם הפונקציה אי זוגית.

שלבים לפתרון:

1. פונקציה אי זוגית צריכה לקיים את המשוואה: $f(x) = -f(-x)$.
 אנו רואים שצד שמאל הוא הפונקציה עצמה ולכן נכתוב קודם כל: (העתקנו את הפונקציה הנתונה)
 $|x| \cdot \sin x =$
 שימו לב שאת אגף ימין כרגע לא כתבנו.

2. באגף ימין - נציב בכל מקום שכתוב x את $-x$.
 נקבל:

$$|x| \cdot \sin x = | -x | \cdot \sin(-x)$$

3. נסדר...

$$|x| \cdot \sin x = -|x| \cdot \sin(x)$$

השתמשו בשתי עובדות:

א. $| -x | = |x|$ (ערך מוחלט הופך כל מספר שלילי לחיובי)

ב. $\sin(-x) = -\sin x$ (זו זהות טריגונומטרית - המינוס יוצא החוצה)

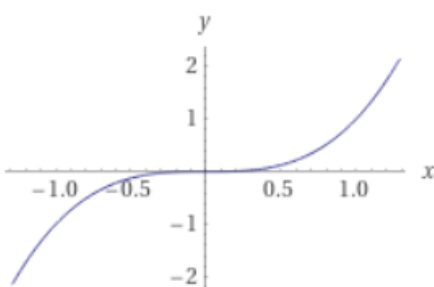
4. קיבלנו במדויק ש: $f(x) = -f(-x)$ כי קיבלנו את אותו הביטוי בשני האגפים עם סימן מנוגד.
 5. הוכחנו שהפונקציה אי זוגית.

משפט מרכזי בנושא זה:

$$f(x) = x^3$$

אינטגרל בקטע סימטרי (כלשהו) של פונקציה אי זוגית שווה 0.

Plot



$$\int_{-\pi}^{\pi} (|x| \cdot \sin x) dx = 0$$

דוגמא קלאסית לפונקציה אי זוגית היא הפונקציה $f(x) = x^3$.

אם תציבו 4 ואז את -4 -> תקבלו אותה תוצאה עם סימן מנוגד. (תעשו את זה...)

אם תציבו כל x ואז את $-x$ -> תקבלו אותה תוצאה עם סימן מנוגד.

פונקציה זוגית

פונקציה זוגית היא פונקציה המקיימת את המשוואה הבאה:

$$f(x) = f(-x)$$

לדוגמא:

נתונה הפונקציה: $f(x) = x^2 \cdot \cos x$
 בדקו האם הפונקציה **זוגית**.

שלבים לפתרון:

1. פונקציה זוגית צריכה לקיים את המשוואה: $f(x) = f(-x)$
 אנו רואים שצד שמאל הוא הפונקציה עצמה ולכן נכתוב קודם כל: (העתקנו את הפונקציה הנתונה)
 $x^2 \cdot \cos x =$

שימו לב שאת אגף ימין כרגע לא כתבנו.

2. באגף ימין – נציב בכל מקום שכתוב x את $-x$.
 נקבל:

$$x^2 \cdot \cos x = (-x)^2 \cdot \cos(-x)$$

3. נסדר...

$$x^2 \cdot \cos x = x^2 \cdot \cos(x)$$

השתמשו בשתי עובדות:

ג. $(-x)^2 = x^2$ (בריבוע הופך מספר שלילי לחיובי)

ד. $\cos(-x) = \cos x$ (זו זהות טריגונומטרית – המינוס נעלם)

4. קיבלנו במדויק ש: $f(x) = f(-x)$ כי קיבלנו את אותו הביטוי בשני האגפים.

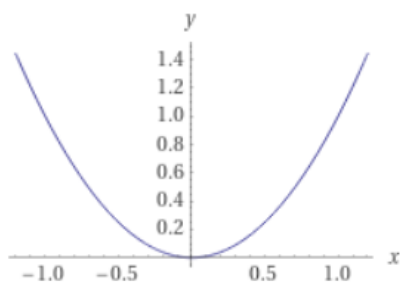
5. הוכחנו שהפונקציה זוגית.

$$f(x) = x^2$$

Geometric figure

parabola

Plot



דוגמא קלאסית לפונקציה זוגית היא הפרבולה $f(x) = x^2$.

אם תציבו 4 ואז את -4 תקבלו אותה תוצאה. (תעשו את זה...)

אם תציבו כל x ואז את $-x$ תקבלו אותה תוצאה.

אלגוריתם לפתרון אינטגרל

האם האינטגרל יסודי ? (נמצא ברשימת "אינטגרלים מידיים")

לא

כן

האם האינטגרל כולל טריגונומטריה?

נחשב לפי הנוסחאות –
סיימנו.

כן

לא

נשקול שימוש בזהויות
טריגונומטריות (בשביל להפוך את
האינטגרל ליסודי או לוריאציה כלשהי
של כמה אינטגרלים יסודיים)

נשקול "שיטת הצבה"

עזר ?

לא עזר ?

יש כפל בין שתי פונקציות?

לא עזר ?

עזר ?

נחשב לפי הנוסחאות –
סיימנו.

נחשב לפי הנוסחאות –
סיימנו.

כן

לא

אינטגרציה בחלקים

נחשוב מחדש...

נחשב לפי הנוסחאות – סיימנו.