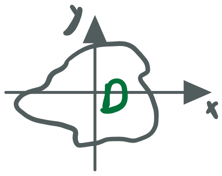
סיכום פרק 17 - אינטגרלים כפולים ומשולשים

אינטגרל כפול



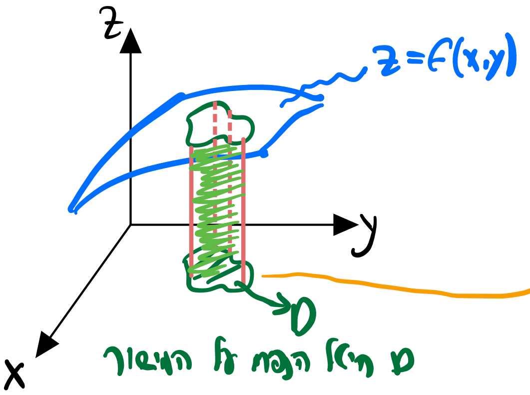
$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_D f(x,y)\,dA$$

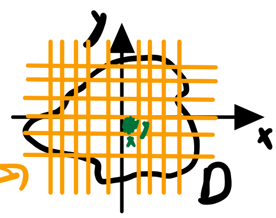
D ← תחום במישור xy.

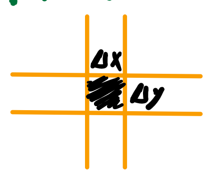
מה מחשבים באמצעות אינטגרל כפול?

1. חישוב נפח מתחת למשטח $z=f(x,y)$
ומעל התחום D.

כאשר D הוא צל הנפח על המישור.



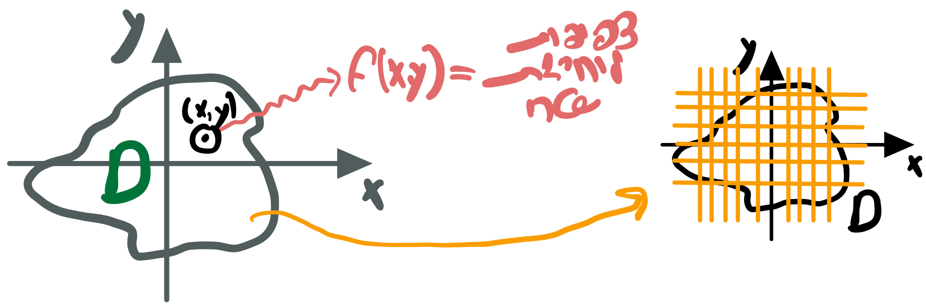


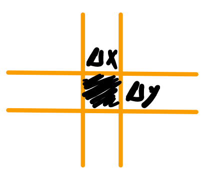


$\sum f(x,y)\Delta x\Delta y$

2. חישוב מסה של D במישור.

כאשר $f(x,y)$ מייצגת צפיפות יחידות שטח בתחום D במישור.





שטח מלבן · צפיפות יחידת שטח = מסה

$\Delta x\Delta y\cdot f(x,y)=\Delta m$

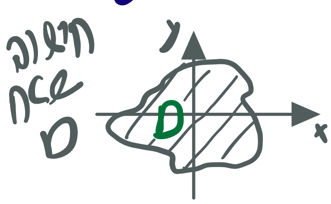
$m_D=\sum\Delta m=\sum f(x,y)\cdot\Delta x\Delta y$

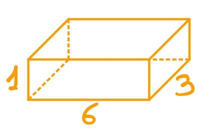
3. חישוב שטח של D במישור.

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\iint_D 1\cdot dxdy = \text{שטח D במישור}$$

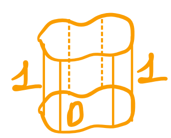
כאשר $f(x,y)=1$

חישוב שטח D



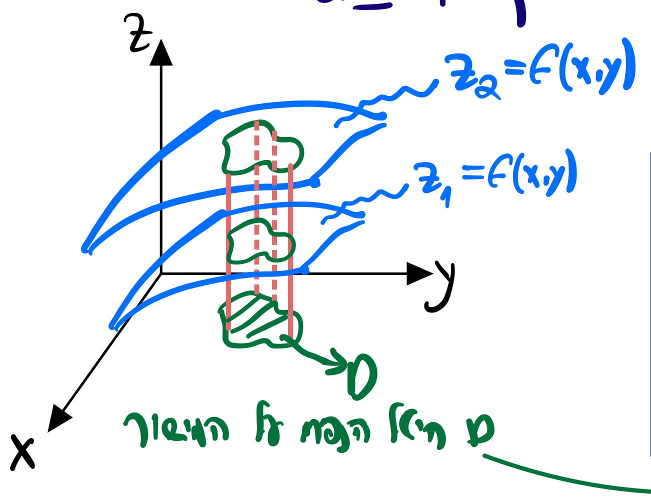


{ נפח שווה שטח }



4. חישוב נפח בין שני משטחים

נתון $z_2 \ge z_1$



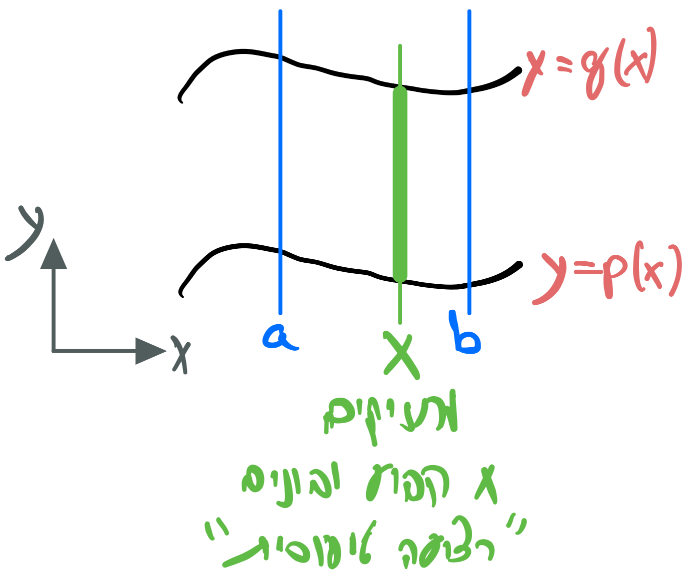
נפח V בין שני המשטחים

$$\iint_D \big(\overbrace{z_2(x,y)}^{\text{עליון}} - \overbrace{z_1(x,y)}^{\text{תחתון}}\big)\,dx\,dy$$

פירוק לאינטגרלים חוזרים

השאלה הבסיסית – פירוק לחישוב אינטגרל כפול ?
הפירוק מבוסס על ניתוח תחום האינטגרציה ותכונות הפונקציה $f(x,y)$.

ניתוח תחום לפי x:

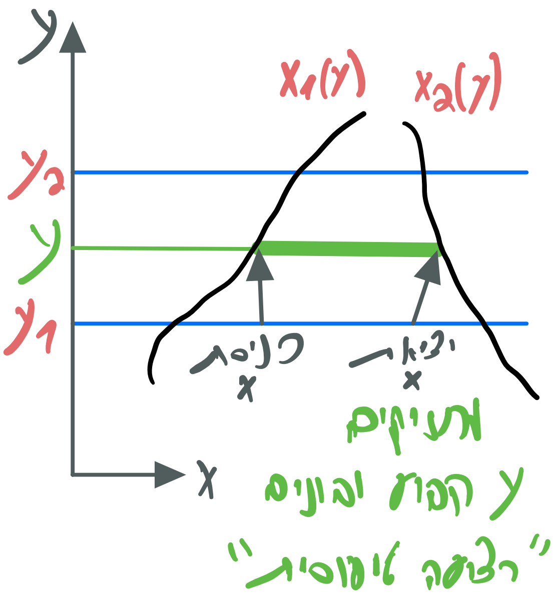


האינטגרל הכפול: $\iint_D f(x,y)\,dxdy$

נכתב כך:

$$\int_a^b dx \int_{y=p(x)}^{y=q(x)} f(x,y)\,dy$$

ניתוח תחום לפי y:



האינטגרל הכפול: $\iint_D f(x,y)\,dxdy$

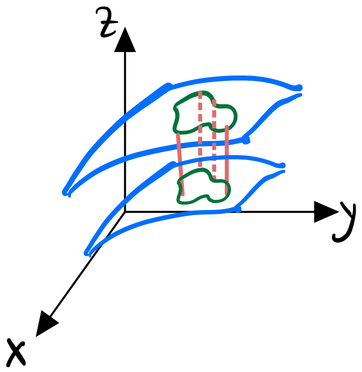
נכתב כך:

$$\int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx$$

אינטגרלים משולשים

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dV = \iiint_{\underset{\text{נפח } V}{V}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

מה מחשבים באמצעות אינטגרל משולש?



1. חישוב מסת תנפח V.

כאשר $f(x,y,z)$ מייצגת צפיפות ליחידת נפח.

---

2. חישוב נפח הגוף V.

$$\text{נפח הגוף } V = \iiint_V 1\,dV = \iiint_{\underset{\text{נפח } V}{V}} 1\,dx\,dy\,dz$$

כאשר $f(x,y,z)=1$

סיכום ביניים:

עומדני 2 דרכים לחשב נפח של גוף V:

$$\iint_{\underset{\text{היטל הנפח על המישור}}{D}} f(x,y)\,dx\,dy \quad / \quad \iiint_{\underset{\text{נפח } V}{V}} 1\,dx\,dy\,dz$$

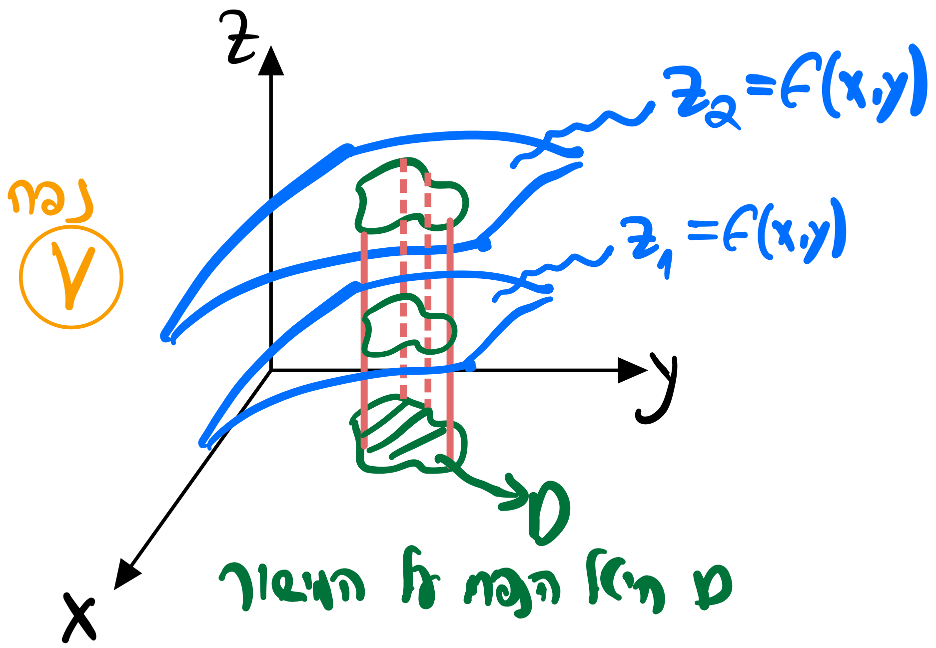
אינטגרלים משולשים

אינטגרלים משולשים מחשבים ע"י פירוק תחילה לפי dz ואחר מכן מבצעים אינטגרל כפול על D.

<u>זה נראה כך:</u>

אם V הוא נפח שכלוא בין משטחים $z_1(x,y)$ ו-$z_2(x,y)$ והיטל הנפח הוא D אזי:

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \underbrace{\iint_D dx\,dy}_{\text{אם זה נוח לפרק לא. חוזרים}}\int_{z_1}^{z_2} f(x,y,z)\,dz$$



סעיף 17.4 עמוד 356
סעיף 18.5 עמוד 454

האינטגרל המשטחי – חלק תיאורטי

$$\iint_S f(x,y,z)\,ds$$

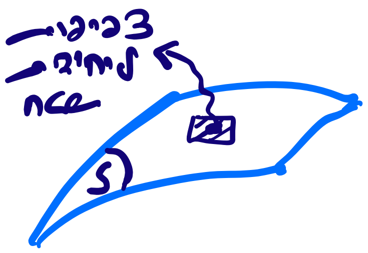
המשטח במרחב או במישור

שעליו "מאנטגרלים" את $f(x,y,z)$

מה מחשבים באמצעות אינטגרל משטחי?

1. חישוב מסה של המשטח S.

כאשר $f(x,y,z)$ מייצגת צפיפות ליחידת שטח של המשטח S.



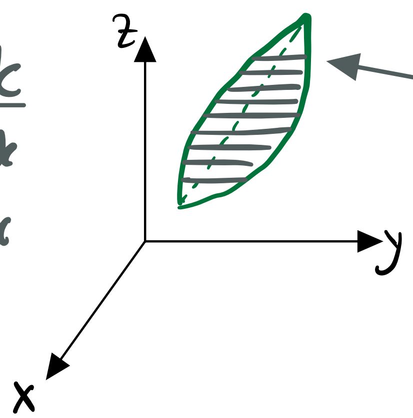
2. חישוב שטח של המשטח S.

$$\iint_S 1\,ds = area(s)$$

המשטח עליו מבצעים אינטגרציה.

כאשר $f(x,y,z)=1$

אם זה משטח S במרחב?



אז:

אפשר לחשב שטח שלו?

אפשר לחשב מסה שלו?

אינטגרלים כפולים ומשולשים – פרק 17

האינטגרל המשטחי – חישוב

חישוב אינטגרל משטחי $\iint_S f(x,y,z)ds$ מבוצע ע"י המרתו לאינטגרל כפול $\iint_D$

נבדיל בין 2 מקרים:

1. המשטח S מוצג פרמטרית:

$x \quad y \quad z$

$u^2-v^2 \quad u-v \quad u$

$r(u,v)=\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)\ ,\ (u,v)\in D$ כאשר
(התחום)

אז האינטגרל המשטחי הוא:

$$\boxed{\iint_S f(x,y,z)ds=\iint_D f\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)\|r_u\times r_v\|\,du\,dv}$$

משטחי הופך לכפול

$$\iint_S f(x,y,z)\underbrace{ds}_{\text{אלמנט השטח}}=\underbrace{\iint_D}_{\text{תחום הפרמטרים של }u,v} f\underbrace{\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)}_{\text{הפונקציה על המשטח}}\underbrace{\|r_u\times r_v\|\,du\,dv}_{\text{אלמנט השטח}}$$

---

2. המשטח S מוצג מפורשות:

המשטח S $\longrightarrow z=f(x,y)$

אז האינטגרל המשטחי הוא:

$$\boxed{\iint_S f(x,y,z)ds=\iint_D f(x,y,g(x,y))\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}\,dx\,dy}$$

משטחי הופך לכפול

$$\iint_S f(x,y,z)\underbrace{ds}_{\text{אלמנט השטח}}=\underbrace{\iint_D}_{\text{היטל על המישור}} f\underbrace{(x,y,g(x,y))}_{\text{הפונקציה על המשטח}}\underbrace{\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}\,dx\,dy}_{\text{אלמנט השטח}}$$

החלפת משתנים באינטגרל כפול

$$\overbrace{\iint_{D_{xy}} f(x,y)\,dx\,dy}^{\text{אינטגרל כפול}} = \overbrace{\iint_{D_{uv}} f\big(x(u,v),\,y(u,v)\big)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv}^{\text{אינטגרל כפול}}$$

הפונקציה מוצגת באמצעות המשתנים החדשים.

יעקוביאן בערכו המוחלט

כיצד ההחלפה מתבצעת:

1. מגדירים את ההחלפה:

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

המשתנים החדשים הם (u,v).

לדוגמא ההחלפה הפולרית:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

המשתנים החדשים הם (r,θ).

דוגמא מחדו"א 1:

$$\int \sin(2x)\,dx = \int \sin t \cdot \frac{1}{2} \cdot dt$$

$t = 2x$

$dt = 2dx$

$\frac{dt}{2} = dx$

2. מציבים את המשתנים החדשים בפונקציה.

לדוגמא אם הפונקציה היא $2x+y^2$ אז נקבל $2\overbrace{(r\cos\theta)}^{x}+\overbrace{(r\sin\theta)}^{y}{}^2$

3. מחשבים יעקוביאן כך:

$$J = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \left| x_u \cdot y_v - x_v \cdot y_u \right|$$

4. כותבים את הדיפרנציאלים במשתנים החדשים:

לדוגמא: $dr\,d\theta$ / $du\,dv$

אינטגרלים כפולים ומשולשים – פרק 17

החלפת משתנים באינטגרל כפול

החלפה לפולרי

$$\boxed{\begin{array}{ll} x = r\cos\theta & \\ y = r\sin\theta & J = r \end{array}}$$

מעגלים
- פונקציה
- תחום

$$\overbrace{\iint_{D_{xy}} f(x,y)\,dxdy}^{\text{אינטגרל כפול}} = \overbrace{\iint_{D_{r\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)}^{\text{אינטגרל כפול}}\, r\,dr\,d\theta$$

עוברים לפולריות

הפונקציה מוצגת באמצעות המשתנים החדשים.

יעקוביאן (בערכו המוחלט)

עמוד 410

אינטגרלים כפולים ומשולשים – פרק 17

החלפת משתנים באינטגרל כפול

משפט עזר פרקטי מאוד

$$\underbrace{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}\cdot\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=1$$

יעקוביאן מבוקש
ההחלפה

$$\underbrace{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}=\frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$$

יעקוביאן מבוקש
ההחלפה

אם יש לנו:

$$\boxed{\begin{aligned}u&=u(x,y)\\ v&=v(x,y)\end{aligned}}$$

אז צריך לבודד x,y ולקבל:

$$\boxed{\begin{aligned}x&=x(u,v)\\ y&=y(u,v)\end{aligned}}$$

ואז מחשב J ...

המשפט חוסך לנו את התהליך הזה...

החלפת משתנים באינטגרל משולש

$$\overbrace{\iiint_{D_{xyz}} f(x,y,z)\,\underbrace{dx\,dy\,dz}}^{\text{אינטגרל משולש}} = \overbrace{\iiint_{D_{uvw}} f\big(x(u,v,w),\,y(u,v,w),\,z(u,v,w)\big)}^{\text{אינטגרל משולש}} \underbrace{\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw}$$

הפונקציה מוצגת באמצעות המשתנים החדשים.

יעקוביאן (בערך מוחלט)

כיצד ההחלפה מבוצעת:

1. מגדירים את ההחלפה:

$$\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$$

המשתנים החדשים הם (u,v,w)

דוגמא מחדו"א 1:

$$\int \sin(2x)\,dx = \int \sin t \cdot \frac{1}{2} \cdot dt$$

$t = 2x$
$dt = 2dx$
$\frac{dt}{2} = dx$

לדוגמא ההחלפה לכדוריות:

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

המשתנים החדשים הם (r,θ,φ)

2. מציבים את המשתנים החדשים בפונקציה.

לדוגמא אם הפונקציה היא $2x+y+z$ אז נקבל $2\overbrace{r\sin\varphi\cos\theta}^{x}+\overbrace{r\sin\varphi\sin\theta}^{y}+\overbrace{r\cos\varphi}^{z}$

3. מחשבים יעקוביאן כך:

$$J = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix} = x_u \begin{vmatrix} y_v & y_w \\ z_v & z_w \end{vmatrix} - x_v \begin{vmatrix} y_u & y_w \\ z_u & z_w \end{vmatrix} + x_w \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}$$

4. כותבים את הדיפרנציאלים במשתנים החדשים:

לדוגמא: $dr\,d\theta\,d\varphi$ / $du\,dv\,dw$

אינטגרלים כפולים ומשולשים – פרק 17

החלפת משתנים באינטגרל משולש

החלפה לכדוריות

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\sin\varphi\cos\theta \\ y &= r\sin\varphi\sin\theta \\ z &= r\cos\varphi \end{aligned} \qquad J = r^2\sin\varphi}$$

$$\overbrace{\iiint_{D_{xyz}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}^{\text{אינטגרל משולש}} = \overbrace{\iiint_{D_{uvw}} f(r\sin\varphi\cos\theta,\ r\sin\varphi\sin\theta,\ r\cos\varphi)}^{\text{אינטגרל משולש}}\ \underbrace{r^2\sin\varphi}_{\text{יעקוביאן (ערכו המוחלט)}}\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

עוברים לכדוריות

הפונקציה מוצבת באמצעות המשתנים החדשים.

אינטגרלים כפולים ומשולשים – פרק 17

החלפת משתנים באינטגרל משולש

משפט עזר פרקטי מאוד

$$\underbrace{\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}}_{\text{יעקוביאן מבוקש ההחלפה}}\cdot\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=1$$

$$\underbrace{\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}}_{\text{יעקוביאן מבוקש ההחלפה}}=\frac{1}{\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}}$$

אם יש לנו:

$$\boxed{\begin{aligned}u&=u(x,y,z)\\ v&=v(x,y,z)\\ w&=w(x,y,z)\end{aligned}}$$

אך צריך מבודד x,y,z ולקבל:

$$\boxed{\begin{aligned}x&=x(u,v,w)\\ y&=y(u,v,w)\\ z&=z(u,v,w)\end{aligned}}$$

ואז מחשב J ...

המשפט חוסך לנו את התהליך הזה...