

ברק - פונקציה ונבואה

למידות ספין קורה:

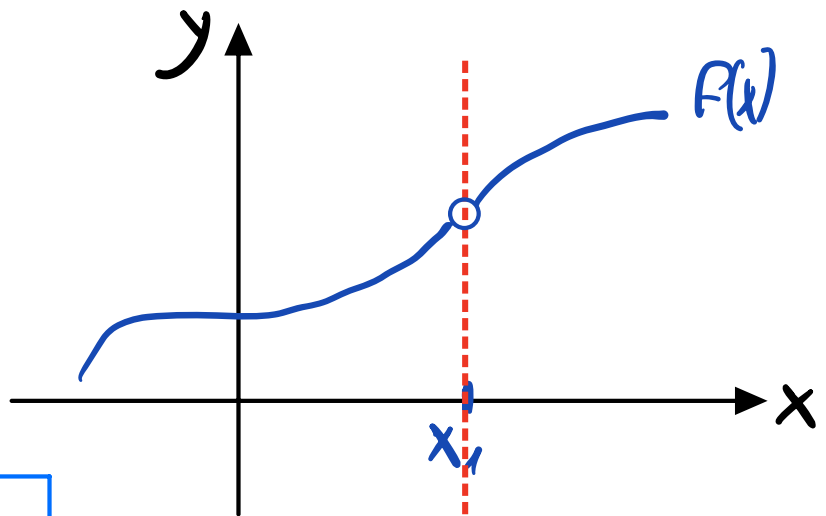
לסגלים על סביבה לנוקה של נקודה על ציר $x = a$ סגל סגל.

המרה: כותנים זה קורה ה"סביבה" הנקודה $x = a$.

למידות זה 3 דגמים

$\lim_{x \rightarrow x_1} \oplus \rightarrow$ לכל לויין

$\lim_{x \rightarrow x_1} \ominus \rightarrow$ לכל לויין



$\lim_{x \rightarrow a} (המקרה) = f(a)$
 (המקרה)

למידות סגל על הנקודה
 למידות סגל על הנקודה (המקרה)

כמה דוגמאות

$\lim_{x \rightarrow 3} x^2, \lim_{x \rightarrow 8} (x+3)$

$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x, \lim_{x \rightarrow -5} \cos x$

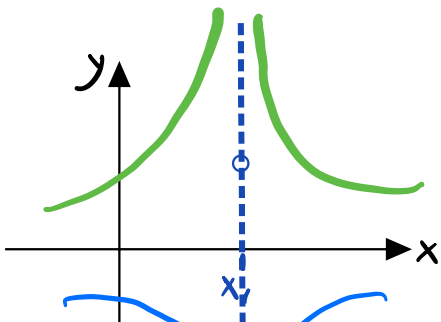
$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x$

פירוק - פונקציה ונכונות

אנחנו מסתכלים על:

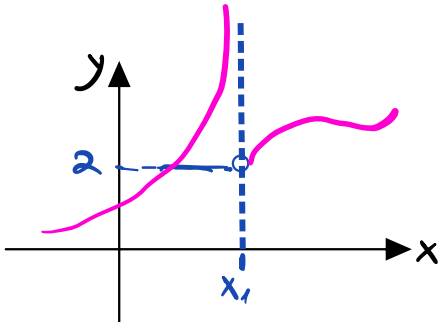
מה האופציות?

אם יש לנו הפונקציה



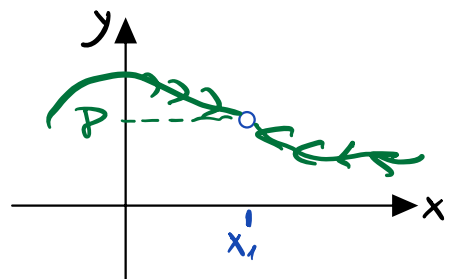
יש נכונות
ב $x=x_1$

אם הפונקציה נכונה

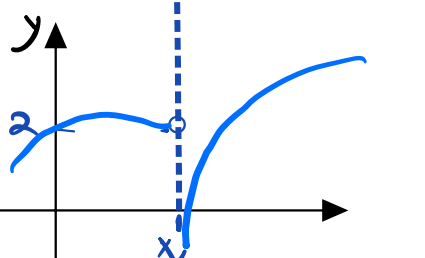


אין נכונות ב $x=x_1$

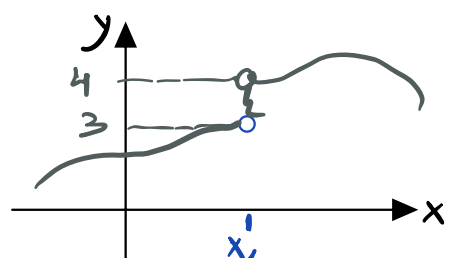
אם הפונקציה נכונה



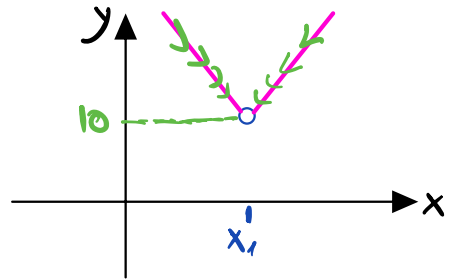
יש נכונות ב $x=x_1$
ולכן 8



אין נכונות ב $x=x_1$



אין נכונות ב $x=x_1$



יש נכונות ב $x=x_1$
ולכן 10

פרק 2 - פונקציה וגבולות

לכלול - סגן ה"אנלי" (אנליזה)

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 3$	$\lim_{x \rightarrow -3} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow 18} \sin x$
$\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow 5^-} e^x$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x$	$\lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan x$

אם תוצאות אפ"ם. לא חייבים שיהיה גלגל.
 נכבד תמיד שתוצאת הפונקציה היא העברה או "שאל" הזלף.

הערה חשובה:

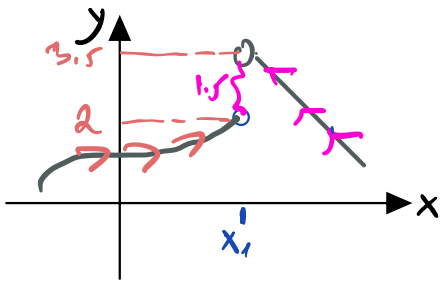
$$\lim_{x \rightarrow a} (\text{המעצמה}) = \text{לוקה הזלף}$$

משפט גרשוני

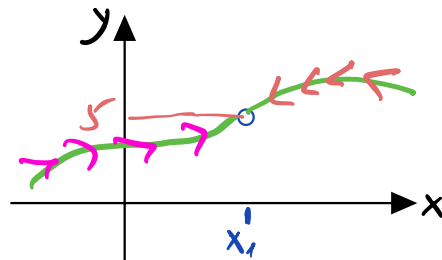
פרק 2 - פונקציה ונגזרת

משפט הייבוס המרכזי

אם קיים גם ורק אם המסלול - היין והמשל קוואם וסווים .
אם לא - נניג שאין גם.



אין גם ג- גא .
כי יש "קפיצה"



יש גם ג וגא וזכנו 5

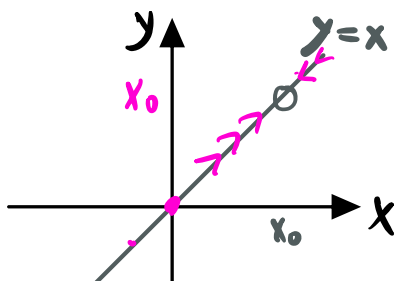
אם לא מתחסיים לערך המקוגה עכמה *

נכתום שום כי זה היסודי

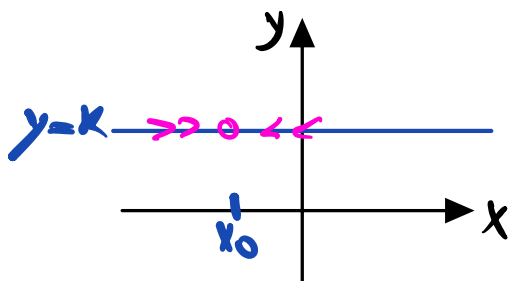
אם קיים גם ורק אם המסלול - היין והמשל קוואם וסווים .
אם לא - נניג שאין גם.

פרק 2 - פונקציה וגבולות

לכל ערך ייחודיים



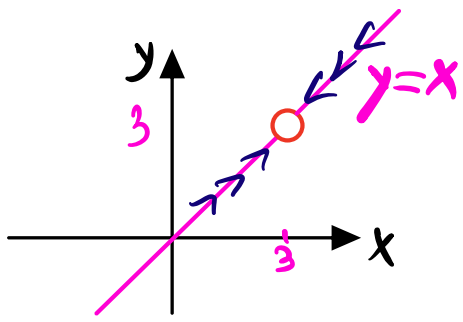
$$\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$$



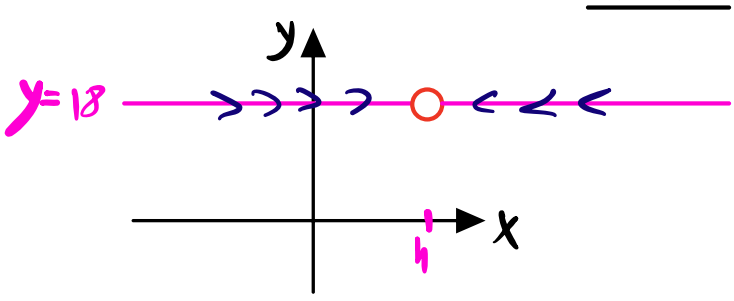
$$\lim_{x \rightarrow x_0} k = k$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)) = f(a)$$

דוגמה:



$$\lim_{x \rightarrow 3} x = 3$$



$$\lim_{x \rightarrow 4} 18 = 18$$

ברק - פונקציה וגבול

משפט האינדוקציה

אם $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ קיימים $\forall \epsilon > 0$:

נכנס מראש

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \quad \left. \begin{array}{l} \text{גבול של סכום} \\ \text{שווה לסכום הגבולים} \end{array} \right\}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \quad \left. \begin{array}{l} \text{גבול של הפרה} \\ \text{שווה להפרת הגבולים} \end{array} \right\}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \quad \left. \begin{array}{l} \text{גבול של מכפלה} \\ \text{שווה למכפלת הגבולים} \end{array} \right\}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} \quad \left. \begin{array}{l} \text{גבול של חצי} \\ \text{שווה לחצי הגבולים} \\ \text{אם גבול המכנה שונה מ-0} \end{array} \right\}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} C \cdot f(x) = C \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \quad \left. \begin{array}{l} \text{הקבוע יוצא מחוץ} \end{array} \right\}$$

* שימו לב למכנים של המכא

פרק 2 - פונקציות וגבולות

חישוב גבול של פולינום - מחוברים בהצבה

נראה פולינום :

$$p(x) = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + c_3 \cdot x^3 + \dots + c_n \cdot x^n$$

הצוקות ← מספרים ארטיים a, b, \dots, n
 c_0, \dots, c_n - מספרים

ליהיו פולינום? נציבים? (אסור שהגבול יתאם...)

אם מתאם נמצא אז גבול אולימיטי...

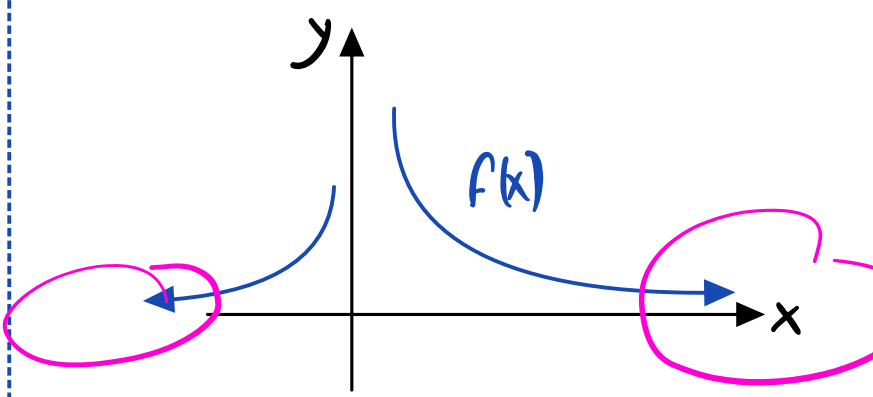
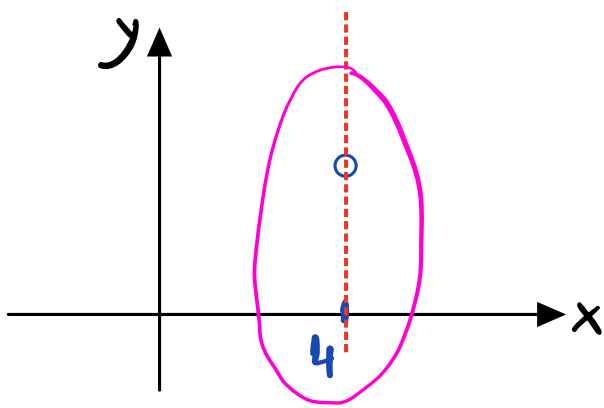
פרק 2 - פונקציה ונמיות

אסימטות

לפי הנקודה מהו ניהו האינסוף

לפי נקודה

לפי האינסוף



הסברו - Zoom In
 פ' סמיית נקודה

הסברו - Zoom Out
 פ' סמיית נקודה

$\lim_{x \rightarrow 4^+} = \pm\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 4^-} = \pm\infty$
 כל } אסימטות אנכית
 א לניו }
 א-4-ה }

$\lim_{x \rightarrow +\infty} = \text{מספר}$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} = \text{מספר}$
 כל } אסימטות אופקית
 מספר = x }

$\lim_{x \rightarrow 4^+} = \text{מספר}$ וגם $\lim_{x \rightarrow 4^-} = \text{מספר}$
 כל אסימטות

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} = \pm\infty$ } כל אסימטות

אסימפטוטות

מציאת אסימפטוטה אופקית של פונקציה:

מחשבים שני גבולות לפונקציה:

1. גבול לפונקציה באינסוף.
2. גבול לפונקציה במינוס אינסוף.

תשובות אפשריות בכל אחד מהגבולות:

- אם מקבלים תשובה שהיא מספר סופי - נגיד שיש אסימפטוטה אופקית והיא: המספר שקיבלנו $y =$.
- אם מקבלים כתוצאה אינסוף או מינוס אינסוף - נגיד שאין אסימפטוטה אופקית.

מציאת אסימפטוטה אנכית של פונקציה:

קודם כל, החשודות להיות אסימפטוטות אנכיות הן כל נקודות אי הרציפות של הפונקציה.

מבנה אסימפטוטה אנכית הוא מספר $x =$.

1. ניקח את נקודות אי הרציפות ונחשב אליהן גבול.
(לדוגמא אם $x = 3$ היא נקודת אי רציפות אז נבדוק גבול בשאיפה ל-3).
במקרה כזה, לרוב נצטרך לפצל לגבולות חד צדדיים.
2. אם משני הצדדים קיבלנו מספר קבוע סופי - נגיד שהישר $x = 3$ אינו אסימפטוטה.
3. אם, באחד הצדדים, קיבלנו אינסוף או מינוס אינסוף - נגיד שהישר $x = 3$ הוא כן אסימפטוטה אנכית.

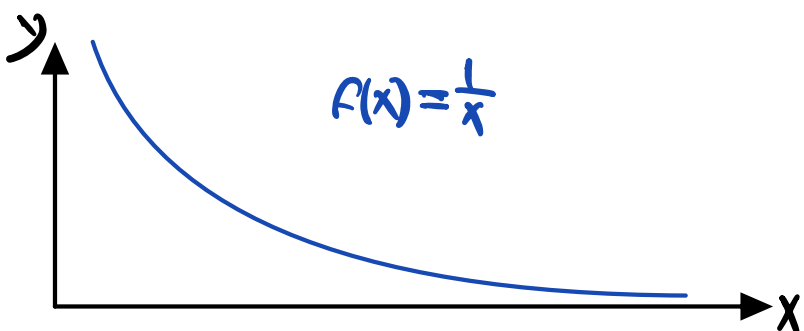
פרק 2 - פונקציות וגבולות

גבולות $x \rightarrow \infty$

דוגמה:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

(ה-x לא נגזר...)



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{c}{x} = 0$$

כאשר c קבוע מסוים.

$$\frac{\pm \infty}{\pm \infty} = \text{לפי חוקי לופיטל} = \text{צריך להחליט}$$

$$\infty - \infty = \text{לפי חוקי לופיטל} = \text{צריך להחליט}$$

$$0 \cdot \infty = \text{לפי חוקי לופיטל} = \text{צריך להחליט}$$

$$\infty \pm c = \infty$$

$$k \cdot \infty = \infty \quad k > 0 \text{ בלבד}$$

$$k \cdot \infty = -\infty \quad k < 0 \text{ בלבד}$$

$$\pm \infty \cdot \pm \infty = \pm \infty$$

$$\infty + \infty = \infty$$

פרק 2 - פונקציה ונגזרת

אפניקו - תאוריית גבולות

1. "תוקף התוקף הגבוה" ("ה"אפניקו")
למי נשאל: כשיש גבול באינפיניטום תוקף פולינומיים

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{3x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x+1}{x^1}}{\frac{3x+2}{x^1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{x} + \frac{1}{x}}{\frac{3x}{x} + \frac{2}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{3 + \frac{2}{x}} = \frac{2+0}{3+0} = \frac{2}{3} \quad \text{סיימונו}$$

פרק 2 - פונקציה וגבולות

תכונות - תאוריה

2. "כפל בצמוד" + "מונה מתוקף הצובה" ("ה"אפקטיבי")
 למי נשתמש: כדי להפוך ביטויים שיש בהם שורש עם צד אחד.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+x} - x) \cdot (\sqrt{x^2+x} + x)}{(\sqrt{x^2+x} + x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+x-x^2}{(\sqrt{x^2+x} + x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{(\sqrt{x^2+x} + x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{(\sqrt{x^2+x} + x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+x}}{x} + \frac{x}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2+x}{x^2}} + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

למניס
 חלק
 הנתון
 $\{x = \sqrt{x^2}\}$

הפונקציה	הצמוד שלה
$\sqrt{3x+4} - 5x$	$\sqrt{3x+4} + 5x$
$\sqrt{4x+x^2} - x$	$\sqrt{4x+x^2} + x$

מה עובדים:

1. נכפילים ומתקיים הצמוד
2. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
3. מונה מתוקף הצובה

פרק 2 - פונקציות וגבולות

אפניקור - תחילתו גבולות

3. "גבול של פונקציה באינסוף העולה או יורד רק החזקה הגבוהה"
אפשר לזכור חזקה הגבוהה אלא זה ארוך

נגזים:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^{10} + 6x + 3}{(2x^2 + 2x + 1)^5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^{10}}{(2x^2)^5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^{10}}{32x^{10}} = \frac{3}{32}$$

חזקה של נוקר - פונקציות: (השוויה לזכור)

1. אם החזקה הכי גבוהה הוא גבול החזקה הכי גבוהה כלשהי:

הגבול הוא אינסוף

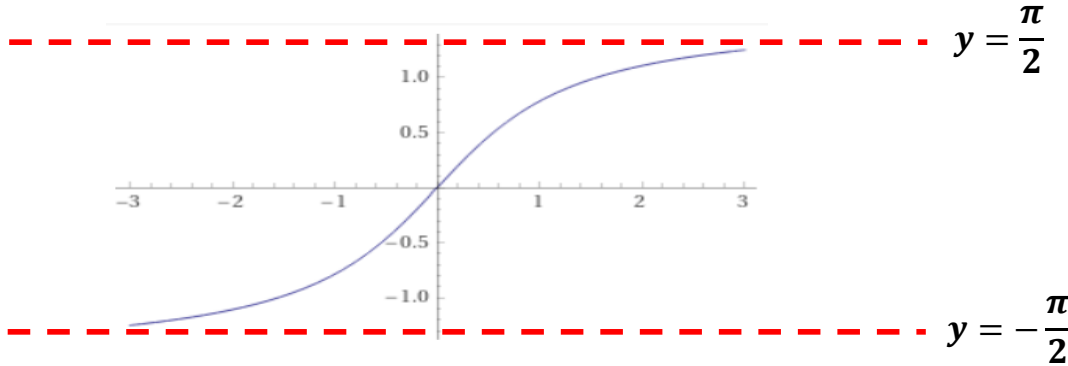
2. אם החזקה הכי גבוהה הוא קצרה החזקה הכי גבוהה כלשהי:

הגבול הוא אפס

3. אם החזקה הכי גבוהה הוא שווה החזקה הכי גבוהה כלשהי:

הגבול הוא מנה המקדמים

פונקציה $\arctan x$



תחום הגדרה:

כל איקס שתמצאו. כל X.

נקודת חיתוך יחידה עם הצירים:

בנקודה $(0,0)$.

נקודות חשובות:

הנקודות $(1, \frac{\pi}{4})$, $(-1, -\frac{\pi}{4})$.

גבולות באינסוף/מינוס אינסוף (אסימפטוטות אופקיות):

$\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x = \arctan(\infty) = \frac{\pi}{2} \rightarrow y = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2} \rightarrow y = -\frac{\pi}{2}$

משולש 2-1-1
→

רציפות:

הפונקציה רציפה תמיד. לכל X שתמצאו.

$\arctan x' = \frac{1}{x^2+1}$, $\arctan(3x)' = \frac{1}{(3x)^2+1} \cdot 3 = \frac{3}{9x^2+1}$

גזירות ישירה/גזירה של הרכבה:

מונוטוניות:

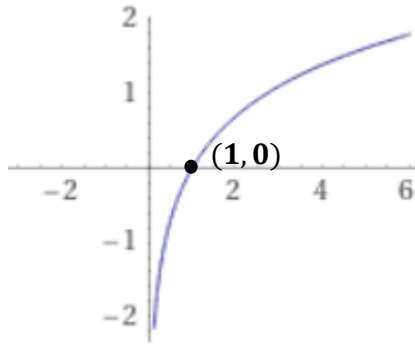
הפונקציה מונוטונית עולה לכל X. תמיד תמיד עולה.

סימן X כסימן $\arctan x$: אם נכניס מספר חיובי - נקבל תשובה חיובית. אם נכניס מספר שלילי - נקבל תשובה שלילית. $\arctan(+)>0$, $\arctan(-)<0$

$\int \arctan x dx = \int 1 \cdot \arctan x dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + K$ **אינטגרל - לא יודעים (!) - עושים אינטגרציה בחלקים:**

$\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x + C$, $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan(\frac{x}{a}) + D$ **שתי נוסחאות של אינטגרל שמוביל לפונקציה:**

פונקציה $\ln x$



למה 2?



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \ln(\infty) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = \ln(0^+) = -\infty$$

תחום הגדרה:

איקסים חיוביים. כל $x > 0$.

חיתוך עם ציר x :

בנקודה $(1, 0)$.

חיתוך עם ציר y :

אין.

גבול באינסוף/גבול ב- 0^+ :

רציפות:

הפונקציה רציפה לכל $x > 0$.

גזירות ישירה/גזירה של הרכבה: לא שוכחים להכפיל בנגזרת פנימית.

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{x}$$

$$(\ln(x^2 + \sin x))' = \frac{1}{x^2 + \sin x} \cdot (2x + \cos x)$$

מונוטוניות (לאט):

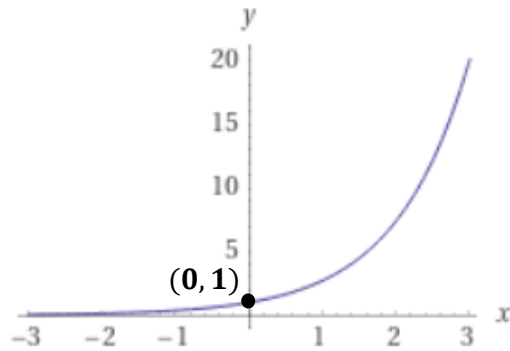
הפונקציה מונוטונית עולה לכל $x > 0$. תמיד תמיד עולה. אבל היא עולה לאט...

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + D, \int \ln x dx = \int 1 \cdot \ln x dx = x \ln x - x + C$$

אינטגרל – לא יודעים (!) - עושים אינטגרציה בחלקים:

מפעילים נוסחא אינטגרציה בחלקים

פונקציה e^x



נלמד!



$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = e^\infty = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = e^{(-\infty)} = \frac{1}{e^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(e^{x^2+3\sin x})' = e^{x^2+3\sin x} \cdot (2x + 3\cos x)$$

$$\int e^x dx = e^x + C, \quad \int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} + D$$

תחום הגדרה:

כל איקס שתרצו. כל X .

חיתוך עם ציר y :

בגובה 1. בנקודה $(0,1)$.

חיוביות:

הפונקציה תמיד חיובית. תמיד נותנת תוצאות גדולות יותר מ-0.

גבולות אינסוף/מינוס אינסוף:

רציפות:

הפונקציה רציפה תמיד. לכל x שתרצו.

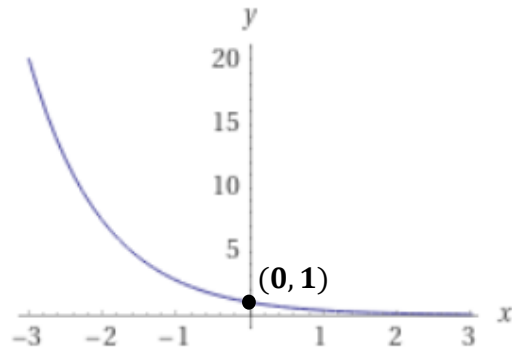
גזירות ישירה + גזירות של הרכבה:

מונוטוניות:

הפונקציה מונוטונית עולה לכל x . תמיד תמיד עולה.

אינטגרל:

פונקציה e^{-x}



$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = e^{-(-\infty)} = e^{\infty} = \infty$$

$$(e^{-x})' = e^{-x} \cdot (-1) = -e^{-x}$$

$$\int e^{-x} dx = -e^{-x} + C, \quad \int e^{-3x} dx = \frac{e^{-3x}}{-3} + D$$

תחום הגדרה:

כל איקס שתרצו. כל X .

חיתוך עם ציר y :

בגובה 1. בנקודה $(0, 1)$.

חיוביות:

הפונקציה תמיד חיובית. כלומר תמיד נותנת תוצאות גדולות יותר מ-0.

גבולות אינסוף/מינוס אינסוף:

רציפות:

הפונקציה רציפה תמיד. לכל x שתרצו.

גזירות ישירה:

מונוטוניות:

הפונקציה מונוטונית יורדת לכל x . תמיד תמיד יורדת.

אינטגרל:

