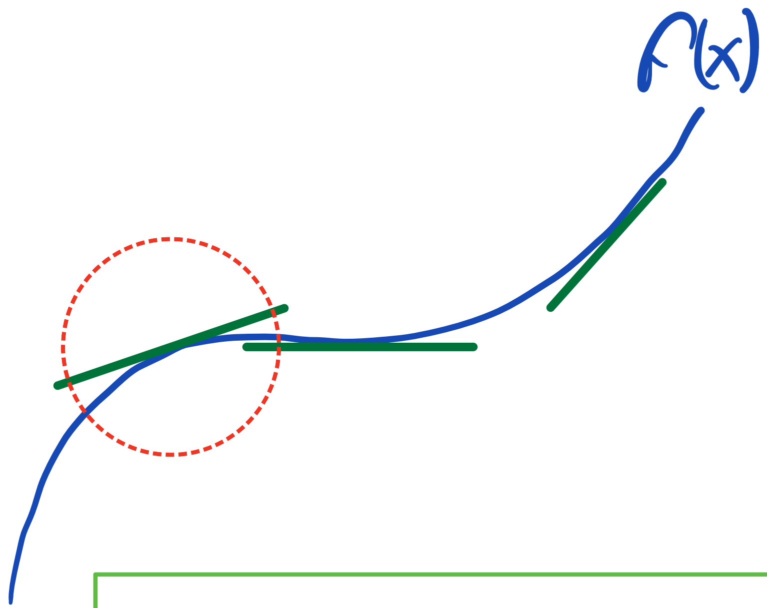
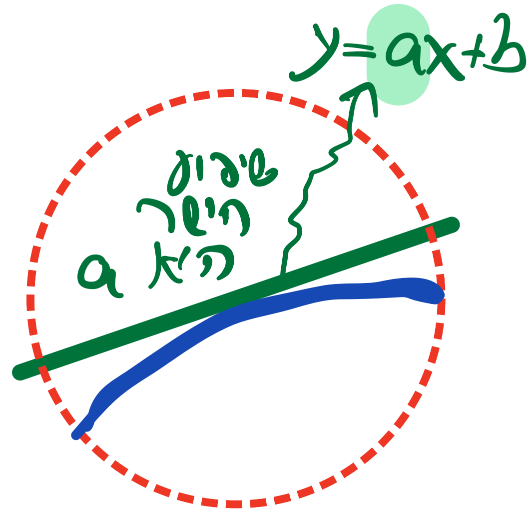
פרק 3 - גזירה

נגזרת = שיפוע - הקדמה

Zoom Out



Zoom In



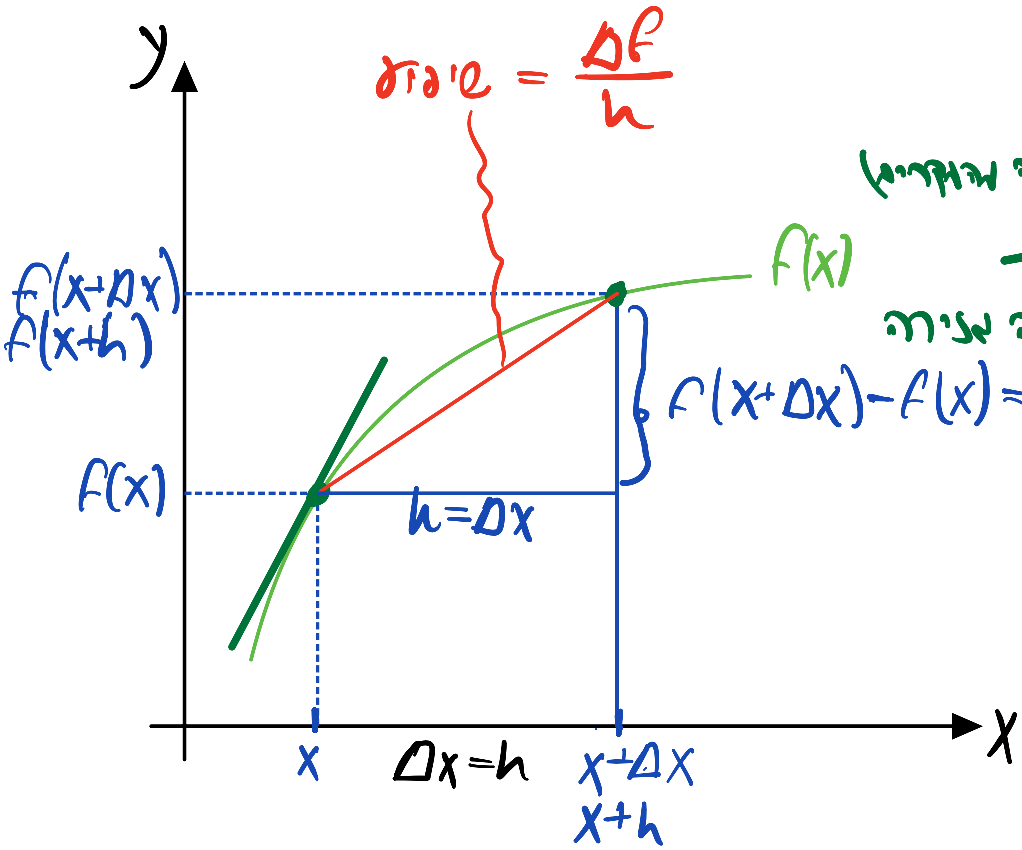
$$\boxed{\text{שיפוע של } f = \text{שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה}}$$

פרק 3 - גזירה

הגדרת הנגזרת

מתי נשתמש?

1. כשמבקשים
2. כשיש ערך מוחלט (בחלק מהמקרים)
3. כשאין נוסחא לנגזרת
4. כשלא יודעים את הפונקציה לגזירה
5. מתוך ניסיון



$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta f}{h}$ = השיפוע של $f(x)$ בנקודה x

הגדרה:

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ = שיפוע הפונקציה בנקודה x = שיפוע המשיק בנקודה x

x_0 היא הנקודה בה מעוניינים לגזור. זה מספר...

פרק 3 - גזירה

לגזור פונקציה - חוקי נגזרות

נתונה הפונקציה $f(x)$:

$$\text{שיפוע} = \text{נגזרת} = f'(x) = \begin{matrix}\text{השיפוע בנקודה } X \\ \text{הנגזרת בנקודה } X\end{matrix} = \frac{df}{dx}$$

הערות:

* כאשר יש נגזרת הפו' תיקרא "גזירה" בנקודה X (זה לא תמיד קורה)
* בנקודה בה יש נגזרת הגרף יהיה חלק לא שפיצים.

סימונים:

$$f'(0)=1 \ , \ \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=0}=1 \ , \ \frac{df}{dx}(x=0)=1$$

פרק 3 - גזירה

משפט 3.2.3 תנאי הכרחי לגזירות

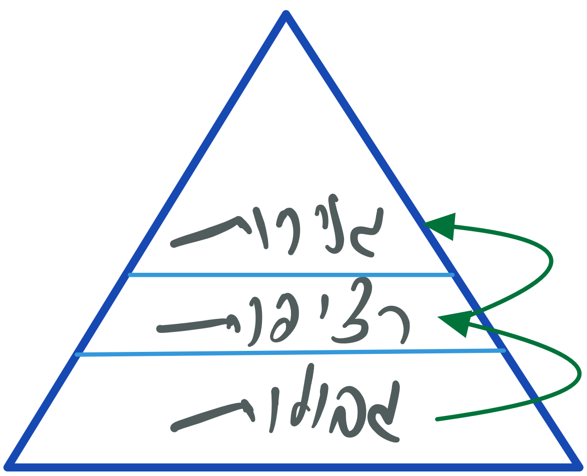
תנאי הכרחי לגזירות בנקודה הוא רציפות בנקודה.

אם אין רציפות אין גזירות!

אם יש רציפות אז
- יש גזירות
- או
- אין גזירות

צריך לבדוק!

רציפות הכרחית לגזירות אבל לא מספיק לגזירות



פרק 3 - גזירה

פונקציות גזירות תמיד

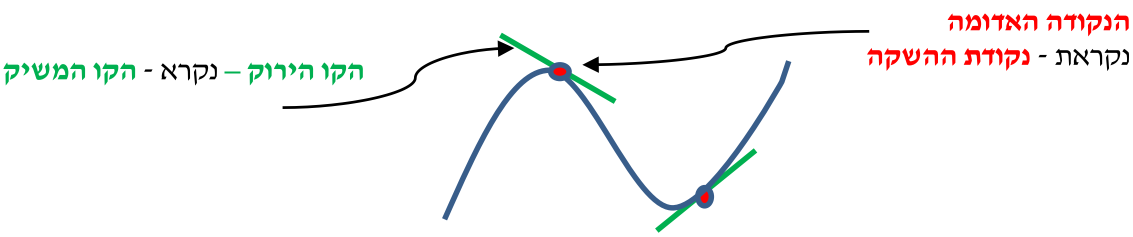
חשוב!

1. פולינומים למיניהם! גזירים לכל x!
2. $\sin x$, $\cos x$ גזירות לכל x!
3. $\arctan x$ גזירה לכל x!
4. e^x, e^{-x} גזירות לכל x!
5. $\ln x$ גזירה כאשר $x>0$ (בתחום ההגדרה...)
6. $\sqrt{x}$ גזירה עבור $x>0$!

נושא - נגזרת

הקדמה:

מה היא פונקציית הנגזרת? נגזרת היא פונקציה חדשה אשר נובעת מהפונקציה המקורית שלנו ע"י ביצוע פעולת הגזירה.
השם "נגזרת" בא לציין בדיוק את זה - שהיא "נגזרת" מהפונקציה המקורית.
הנגזרת היא מאין תעודת זהות של הפונקציה המקורית ובעזרתה נוכל ללמוד הרבה על התנהגות פונקציית המקור.
אחד השימושים המרכזיים בנגזרת הוא מציאת השיפוע של המשיק לגרף הפונקציה כפי שרואים באיור הבא:



- **משיק -** ישר העובר דרך נקודה כלשהי על הפונקציה והכיוון שלו יהיה זהה לכיוון הפונקציה באותה הנקודה.
המשיק הוא קו ישר ה"נושק" לפונקציה בנקודה. מכיוון שהמשיק הוא קו ישר אז יש לו שיפוע מוגדר.
באמצעות הנגזרת ניתן לחשב את השיפוע של המשיק לפונקציה בכל נקודה על הפונקציה המקורית.

- **נקודת השקה -** נקודה על הפונקציה בה עובר המשיק והיא משותפת לפונקציה וגם למשיק.

- **סימון:** אם את הפונקציה המקורית מסמנים ב- $f(x)$ אז את הנגזרת של הפונקציה מסמנים עם '- $f'(x)$.

ישנם כמה סוגים של נגזרות:

1. נגזרת של מספר
2. נגזרת של קו ישר
3. נגזרת המשלבת x ומספר
4. נגזרת של פולינום
5. נגזרת של מכפלת פונקציות
6. נגזרת של מנת פונקציות
7. נגזרת מורכבת
8. נגזרת עם פרמטר
9. נגזרת פונקציית שורש
10. נגזרת פונקציה טריגונומטרית
11. נגזרת פונקציה מעריכית
12. נגזרת פונקציה לוגריתמית

נדגים כל נגזרת:

1. **נגזרת של מספר -** נגזרת של מספר היא 0.

דוגמא: $f(x) = 3$ אז הנגזרת $f'(x) = 0$

---

2. **נגזרת של קו ישר -** נגזרת של קו ישר היא המספר שנמצא לפני ה- x.

דוגמא: $f(x) = -4x$ אז הנגזרת $f'(x) = -4$

---

3. **נגזרת המשלבת x ומספר -** אם בפונקציה יש שילוב של x ומספר, נגזור כל אחד מהם **בנפרד**.

דוגמא: נתון הישר $f(x) = 3x + 2$ נגזור כל חלק בנפרד - הנגזרת של $3x$ היא 3 והנגזרת של 2+ היא 0.

לכן הנגזרת כולה היא $f'(x) = 3 + 0 = 3$ כלומר $f'(x) = 3$

---

4. **נגזרת של פולינום -** כלל הבסיס בגזירת פונקציית פולינום אומר כך:

אם הפונקציה הנתונה היא $f(x) = x^n$ אז הנגזרת היא $f'(x) = nx^{n-1}$

נראה דוגמאות:

נתון הפולינום $f(x) = x^4$ אז הנגזרת שלו היא $f'(x) = 4x^3$.

נתון הפולינום $f(x) = x^6 + 5$ אז הנגזרת שלו היא $f'(x) = 6x^5 + 0$ כלומר $f'(x) = 6x^5$.

נתון הפולינום $f(x) = 5x^3$ אז הנגזרת שלו היא $f'(x) = 5 \cdot 3x^2 = 15x^2$.

---

5. **נגזרת של מכפלת פונקציות -** כאשר נתונה לנו פונקציה $A(x)$ שהיא מכפלה של שתי פונקציות.

$$\boldsymbol{A(x) = f(x) \cdot g(x)}$$

אז הנגזרת של מכפלת הפונקציות תראה כך:

$$\boldsymbol{A'(x) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)}$$

דוגמא: $A'(x) = [4x(x^3 + 1)]' = 4(x^3 + 1) + 3x^2 \cdot 4x$

---

6. **נגזרת של מנת פונקציות -** במידה ונתונות שתי פונקציות שהקשר ביניהן הוא קשר של חילוק

אז הנגזרת של מנת הפונקציה תראה כך $\boldsymbol{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{[g(x)]^2}}$

(נגזרת מנה שווה לנגזרת המונה ($f'(x)$) **כפול** פונקציית המכנה ($g(x)$) **פחות** נגזרת המכנה ($g'(x)$) **כפול** פונקציית המונה ($f(x)$) וכל זה **חלקי** פונקציית המכנה בריבוע ($[g(x)]^2$).

דוגמא: $f(x) = \frac{4x+2}{x^3} = f'(x) = \frac{4 \cdot x^3 - 3x^2(4x+2)}{(x^3)^2}$

7. **נגזרת מורכבת -** פונקציה מורכבת היא פונקציה המכילה 2 פונקציות. גם הנגזרת שלה תכיל 2 פונקציות.
נגזור פונקציה מורכבת לפי הכלל הבא: $\boldsymbol{[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$ **(גוזרים מבחוץ פנימה)**

דוגמא: נתונה הפונקציה $f(x) = (3-4x)^5$ והנגזרת שלה היא $f'(x) = 5(3-4x)^4 \cdot (-4)$

---

8. **נגזרת עם פרמטר -** פרמטר הוא בעצם מספר ואנחנו מתייחסים אליו כמספר.
נתונה הפונקציה $f(x) = ax$ אז הנגזרת שלה היא $f'(x) = a$.

דוגמא: נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3$ והנגזרת שלה $f'(x) = 3 \cdot ax^2$

---

9. **נגזרת פונקציית שורש -** יש 2 נוסחאות לגזירה של שורש: פונקציית שורש פשוטה ומורכבת.

פשוטה: $\boldsymbol{(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$ ומורכבת: $\boldsymbol{\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x)}$

דוגמא לפונקציית שורש פשוטה: נתונה הפונקציה $f(x) = 4\sqrt{x}$ והנגזרת שלה היא

$$f'(x) = 4 \cdot (\sqrt{x})' = 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{4}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

דוגמא לפונקציית שורש מורכבת: נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{4x}$ והנגזרת שלה היא

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4x}} \cdot 4 = \frac{4}{2\sqrt{4x}} = \frac{2}{\sqrt{4x}}$$

---

10. **נגזרת פונקציה טריגונומטרית** – נוסחאות:

- נתונה הפונקציה $f(x) = sinx$ והנגזרת שלה היא $f'(x) = cosx$
- נתונה הפונקציה $f(x) = cosx$ והנגזרת שלה היא $f'(x) = -sinx$
- נתונה הפונקציה $f(x) = -sinx$ והנגזרת שלה היא $f'(x) = -cosx$
- נתונה הפונקציה $f(x) = -cosx$ והנגזרת שלה היא $f'(x) = sinx$
- נתונה הפונקציה $f(x) = tanx$ והנגזרת שלה היא $f'(x) = \frac{1}{cos^2x}$

לדוגמא: נתונה הפונקציה $f(x) = 3sinx$ והנגזרת שלה היא $f'(x) = 3cosx$
לדוגמא: נתונה הפונקציה $f(x) = 5cosx$ והנגזרת שלה היא $f'(x) = -5sinx$
עוד דוגמא: נתונה הפונקציה $f(x) = 3x \cdot sinx$ והנגזרת שלה היא $f'(x) = 3 \cdot sinx + 3x \cdot cosx$
(לפי הנוסחה של נגזרת מכפלה: $A'(x) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$)

---

11. נגזרת פונקציה מעריכית - במקרה של e^x הנגזרת של הפונקציה שווה לפונקציה עצמה $f'(x) = e^x$.

דוגמא: נתונה הפונקציה- $f(x) = e^x$ והנגזרת שלה היא $f'(x) = e^x$

עוד דוגמא: נתונה הפונקציה $f(x) = e^x + 3x - 4$ והנגזרת שלה היא $f'(x) = e^x + 3$

---

12. נגזרת פונקציה לוגריתמית - נגזרת של פונקציית lnx **פשוטה** היא $\frac{1}{x}$.

נגזרת של $ln(f(x))$ **מורכבת** היא $\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$.

דוגמא: נתונה הפונקציה $f(x) = 5lnx$ והנגזרת שלה $f'(x) = 5 \cdot \frac{1}{x} = \frac{5}{x}$

עוד דוגמא: נתונה הפונקציה $f(x) = ln(x^3)$ והנגזרת שלה $f'(x) = \frac{1}{x^3} \cdot 3x^2 = \frac{3}{x}$

ועוד דוגמא: נתונה הפונקציה $f(x) = ln(-4x^2 - 5)$

והנגזרת שלה היא: $f'(x) = \frac{1}{-4x^2-5} \cdot (-8x) = \frac{8x}{4x^2+5}$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{x^2+1}$$

סיכום כללי הנגזרות

כללים בסיסיים
נגזרת של קבוע: $C' = 0$
נגזרת של משתנה: $x' = 1$, $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{1}{(f(x))^2} \cdot f'(x)$, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
נגזרת של מכפלת קבוע במשתנה: $(cx)' = c$
נגזרת עם חיסור/חיבור בין פונקציות: $(f(x) \pm h(x))' = f'(x) \pm h'(x)$
נגזרת עם כפל בין פונקציות: $(f(x) \cdot h(x))' = f'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot h'(x)$
נגזרת של מנה בין פונקציות: $(\frac{f(x)}{h(x)})' = \frac{f'(x) \cdot h(x) - f(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$
נגזרת של פונקציה עם חזקות ושורשים
נגזרת של חזקה: $(x^n)' = nx^{n-1}$
נגזרת של פונקציית שורש פשוטה: $\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
נגזרת של פונקציית שורש מורכבת: $(\sqrt{f(x)})' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x)$
נגזרת של מכפלת קבוע במשתנה עם חזקה: $((A(x))^n)' = n \cdot (A(x))^{n-1} \cdot A'(x)$
נגזרות של פונקציות טריגונומטריות
נגזרת של sinx: $(sinx)' = cosx$
נגזרת של cosx: $(cosx)' = -sinx$
נגזרת של -sinx: $(-sinx) = -cosx$
נגזרת של -cosx: $(-cosx)' = sinx$
נגזרת של tanx: $(tanx)' = \frac{1}{cos^2x}$ $(arctanx)' = \frac{1}{x^2+1}$
נגזרת של sin עם פונקציה: $(sin(f(x))' = \cos(f(x)) \cdot f'(x)$
נגזרת של cos עם פונקציה: $(\cos(f(x)) = -\sin(f(x)) \cdot f'(x)$
נגזרת של tan עם פונקציה: $(\tan(f(x)) = \frac{1}{cos^2 f(x)} \cdot f'(x)$
נגזרות של פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות
נגזרת של e^x: $(e^x)' = e^x$
נגזרת של e^x עם פונקציה: $(e^{f(x)})' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$
נגזרת של ln: $(lnx)' = \frac{1}{x}$
נגזרת של ln עם פונקציה: $(\ln(f(x)))' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$

חשוב!

פרק 3 - גזירה

אריתמטיקה של נגזרות - עמוד 169 - 3.3.

אם $f(x), g(x)$ גזירות בנקודה $x=a$

אז פונקציית:

הסכום
ההפרש $(f\pm g)'=f'\pm g'$

המכפלה $(f\cdot g)'=f'g+fg'$

והחילוק $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$

כאשר המכנה $\neq 0$

גם הן גזירות בנקודה $x=a$.

הערות:

1. כל אחת מהפונקציות גזירה בנפרד בנקודה המדוברת!
2. ההערה הראשונה היא תנאי הכרחי לקיום המשפט. כלומר - הוא חייב להתקיים בתור התחלה.

פרק 3 - גזירה

גזירות של הרכבה

$$\boxed{y(x) = \underbrace{f}_{\text{חיצונית}}(\underbrace{g(x)}_{\text{פנימית}}))}$$

מהם התנאים שצריכים להתקיים על מנת שנגיד ש- $y(x)$ גזירה בנקודה x?

$y(x)=\sin(x^3+8)$

$f(x)=\sin x$

$g(x)=x^3+8$

1. g גזירה ב-x.
2. f גזירה ב-$g(x)$.

ההרכבה

אם שניהם מתקיימים נגיד ש-y גזירה ב-x.

הרכבה של פונקציות גזירות לפי x היא כמובן גזירה לפי x.

נגזרת:

$$\boxed{y'(x) = \underbrace{f'(g(x))}_{\text{נגזרת חיצונית}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\text{נגזרת פנימית}}}$$

כלל השרשרת
גוזרים
מבחוץ פנימה.

פרק 3 - גזירה

משפט עמוד ס 18

נתונה פונקציה מפוצלת. רוצים לבדוק גזירות בנקודת התפר.

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x), & x \geq x_0 \\ f_2(x), & x < x_0 \end{cases}$$

שלבים לביצוע:

1. בודקים אם יש רציפות ב- x_0
   - אם אין ← אין גזירות
   - אם יש ← ממשיכים

2. גוזרים כל ענף בנפרד. מורידים את השיוויון!

$$f'(x)=\begin{cases} f_1'(x), & x > x_0 \\ f_2'(x), & x < x_0 \end{cases}$$

3. בודקים גבול של הנגזרת בנקודת התפר.

$$\lim_{x \to x_0^+} f_1' = \lim_{x \to x_0^-} f_2' \xrightarrow{\text{אם שווים}} f'(x_0) = \text{ערך הגבול}$$

קיימת

אם לא שווים ← $f'(x_0)$ לא קיימת

פרק 3 - גזירה

כלל לופיטל - סעיף 10.2

כלל לופיטל הוא כלי טכני, קל לשימוש...
שעוזר לנו לחשב גבולות מסוג מסוים.
הוא מפשט מאוד את החישוב...
סימון: לופיטל/ Lop / L

דגש מרכזי:
הכלל עובד בחישוב גבול של **מנה בלבד** הנקראת **"מנה לופיטלית"**.

הכלל עובד כך:

$$\boxed{\lim_{x\to\square}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\square}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

"מנה לופיטלית". → $\boxed{\begin{matrix}\text{"}\dfrac{0}{0}\text{"}\\[2ex] \text{"}\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}\text{"}\end{matrix}}$

מה עושים תכלס?
1. גוזרים מונה ומכנה **בנפרד**.
2. מחשבים שוב את הגבול עד הגעה לתשובה.