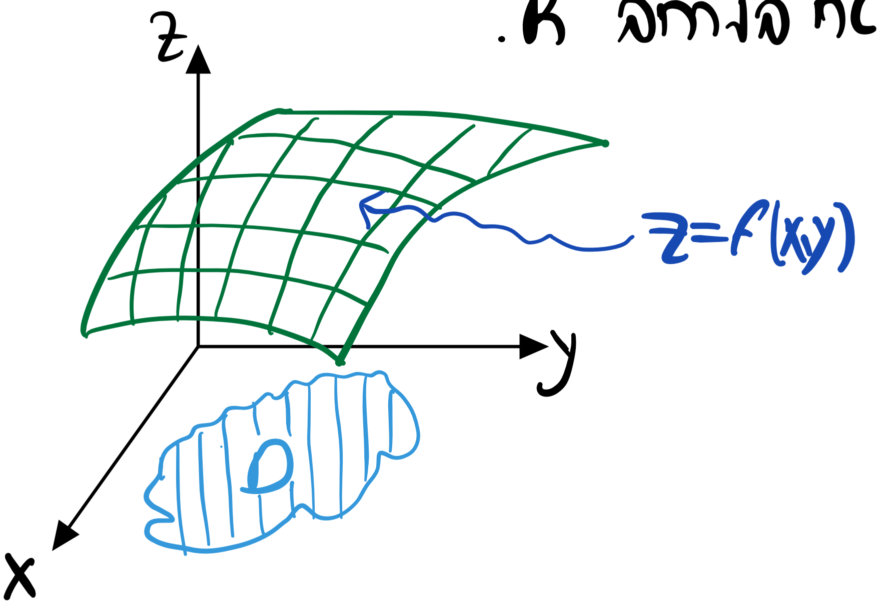
סיכום פרק 16 - אינטגרלים משטחיים

מבוא לפונקציות ב- 2,3 משתנים

פונקציה $f(x,y)$.

$z=f(x,y)$ הגרף הוא משטח במרחב R^3.

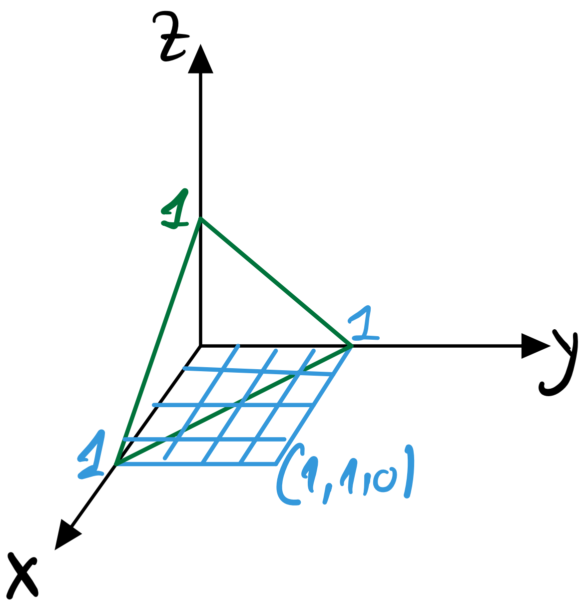


למשל:

$$f(x,y)=1-x-y$$
$$0\le x\le 1$$
$$0\le y\le 1$$

$$z=1-x-y$$

$$\boxed{x+y+z=1}$$



קוי גובה

הצורה הכללית היא $\boxed{f(x,y)=k}$

משווים את הפונקציה הנתונה <u>למספר</u> ומקבלים את

אוסף הנקודות <u>במישור</u> שעבורן מתקבל <u>על המשטח</u> גובה k .

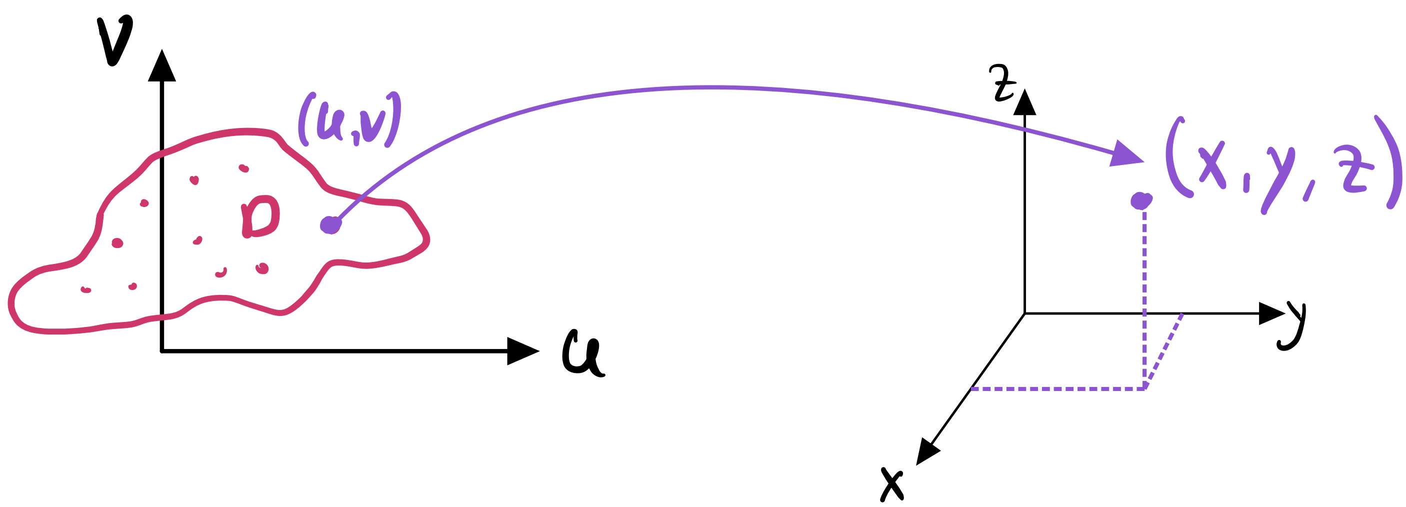
הצגה פרמטרית של משטחים במרחב

משטח במרחב "קרא מוצג פרמטרית אם צורתו/כתיבתו היא כזו:

$$\boxed{\underline{r}(u,v) = \big(\underbrace{x(u,v)},\underbrace{y(u,v)},\underbrace{z(u,v)}\big)}$$

שם המשטח

ביטויים של (u,v)

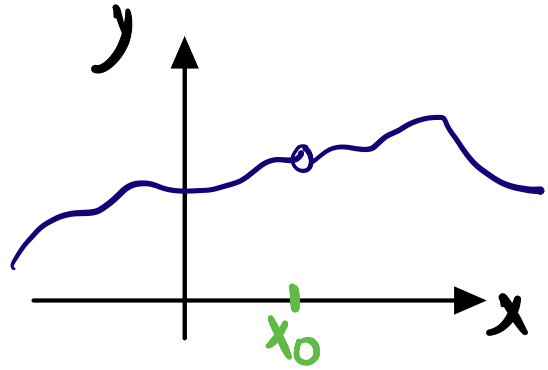


בוחרים (u,v) במישור ומקבלים נקודה (x,y,z) מתאימה במרחב.

כל הנקודות (x,y,z) יחד - "יבנו" את המשטח.

גבולות ורציפות של פונקציה בשני משתנים

חדו״א א׳

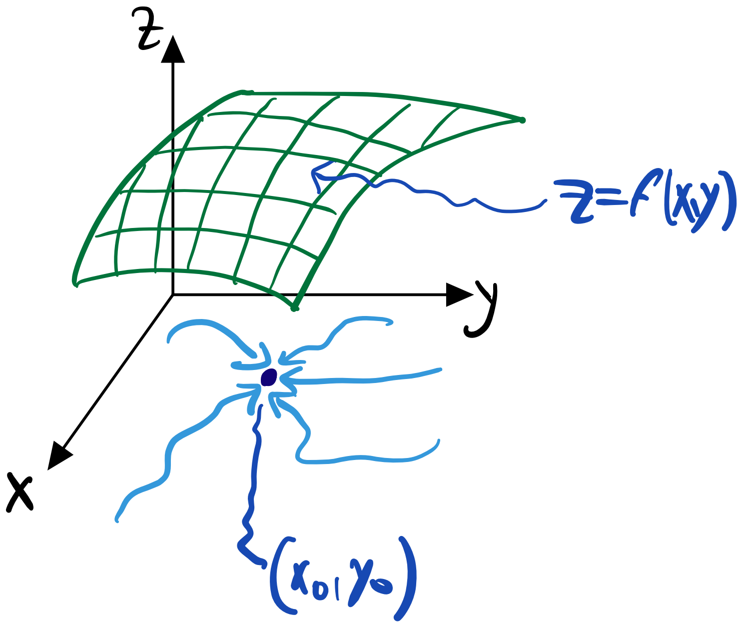


$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) \overset{?}{=} \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

אנחנו אומרים שגבול קיים אם בכל דרך
נתקרב אל הנקודה (x_0,y_0) במישור הרצפה
תמיד הפונקציה f תתקרב ותישאר
למספר L.

מתקרבים על ידי כל הכיוונים ברצפה
לכיוון (x_0,y_0) והפונקציה תמיד שואפת ל-L

חדו״א ב׳



$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

גבול קיים ושווה L
אם נתקרב על כל הכיוונים
והפונקציה תמיד תשאף ל-L.
(גובה)

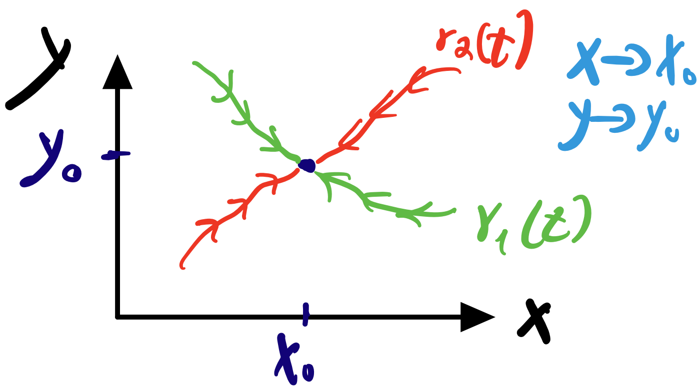
גבולות ורציפות של פונקציה בשני משתנים

אנחנו יודעים איך מוכיחים שאין גבול?

אם נמצא שתי עקומות שונות שבהן נתקרב אל הנקודה (x_0,y_0)

אבל על העקומות הנ"ל הפונקציה תשאף לערכים שונים,

אז נגיד שאין גבול בנקודה (x_0,y_0).



גבולות ורציפות של פונקציה בשני משתנים

סיכום ביניים:

עד עכשיו למדנו להוכיח שאין גבול? איך?

בחרנו שתי עקומות שונות, התקרבנו עליהן, וקיבלנו תוצאה שונה.

$$f\Big|_{r_1(t)} \to L_1 \quad , \quad f\Big|_{r_2(t)} \to L_2$$

$$\boxed{L_1 \neq L_2}$$

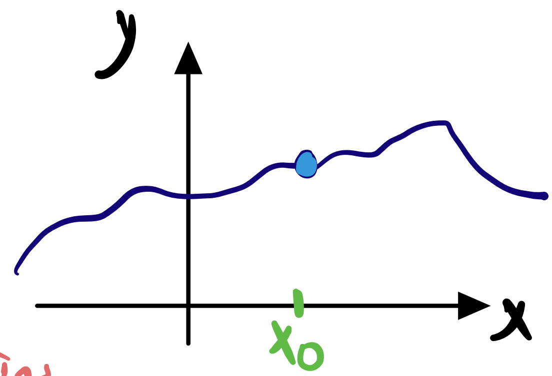
גורר אין גבול

מהן העקומות שכדאי לנו ללכת עליהן על מנת להוכיח זאת?

1. העקומה $y=x$ ← $r_1(t)=(t,t)$
2. ציר x ← $r_2(t)=(t,0)$
3. ציר y ← $r_3(t)=(0,t)$
4. $y=2x$ ← $r_4(t)=(t,2t)$
5. $y=3x$ ← $r_5(t)=(t,3t)$
6. $y=\sin x$ ← $r_6(t)=(t,\sin t)$
7. $y=\cos x$ ← $r_7(t)=(t,\cos t)$

גבולות ורציפות של פונקציה בשני משתנים

חדו"א א'



$$\underbrace{\lim_{x\to x_0} f(x)}_{\text{גבול}} \overset{?}{=} \underbrace{f(x_0)}_{\text{ערך נקודתי}}$$

רציפות

חדו"א ב'

אם:

$$\boxed{\underbrace{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)}_{\text{גבול}} = \underbrace{f(x_0,y_0)}_{\text{ערך נקודתי}}}$$

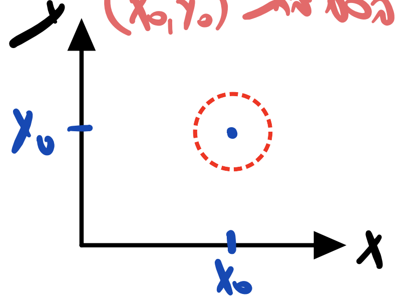
אז f תיקרא רציפה ב- (x_0,y_0)

נזכור: אם אין גבול ⇐ אין רציפות.

משפט הסנדוויץ'

משמש להוכחה שיש גבול בנקודה (x_0,y_0).

כאשר (x,y) מכל צד (x_0,y_0)



$$g(x,y) \le f(x,y) \le g_1(x,y)$$

אם $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g = L$ אם $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g_1 = L$

אז $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f = L$

הפרקטיקה וורסית:

אם $\lvert f \rvert \le h(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(x_0,y_0)]{} 0$ זה אומר ש $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0$

שיטת עבודה:

1. שמים ערך מוחלט על הפונקציה הנתונה.
2. מגדילים את הפונקציה המוחלטת. (בדיוק כמו הגדלה בטורים/אינטגרלים)
ההגדלה צריכה להיות באופן שבו נוכל להוכיח שהגבול בנקודה של הפונקציה המוגדלת הוא אפס.

נגזרות חלקיות

תזכורת א':

נגזרת לפי הגדרה:

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

נזכרנו לפי חוקי הנגזרות ואיפה שאי אפשר השתמשנו בנגזרת לפי הגדרה.

<u>לדוגמא:</u> איפה שיש ערך מוחלט - נגזרת בנקודת האיפוס של ערך מוחלט.

תזכורת ב':

נגזרת לפי x

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h} = \underset{(x_0,y_0)\text{ בנקודה } x \text{ נגזרת חלקית לפי}}{=} f_x(x_0,y_0) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{(x_0,y_0)}$$

כשגוזרים לפי x אז y הוא קבוע. מתייחסים אליו כמספר.

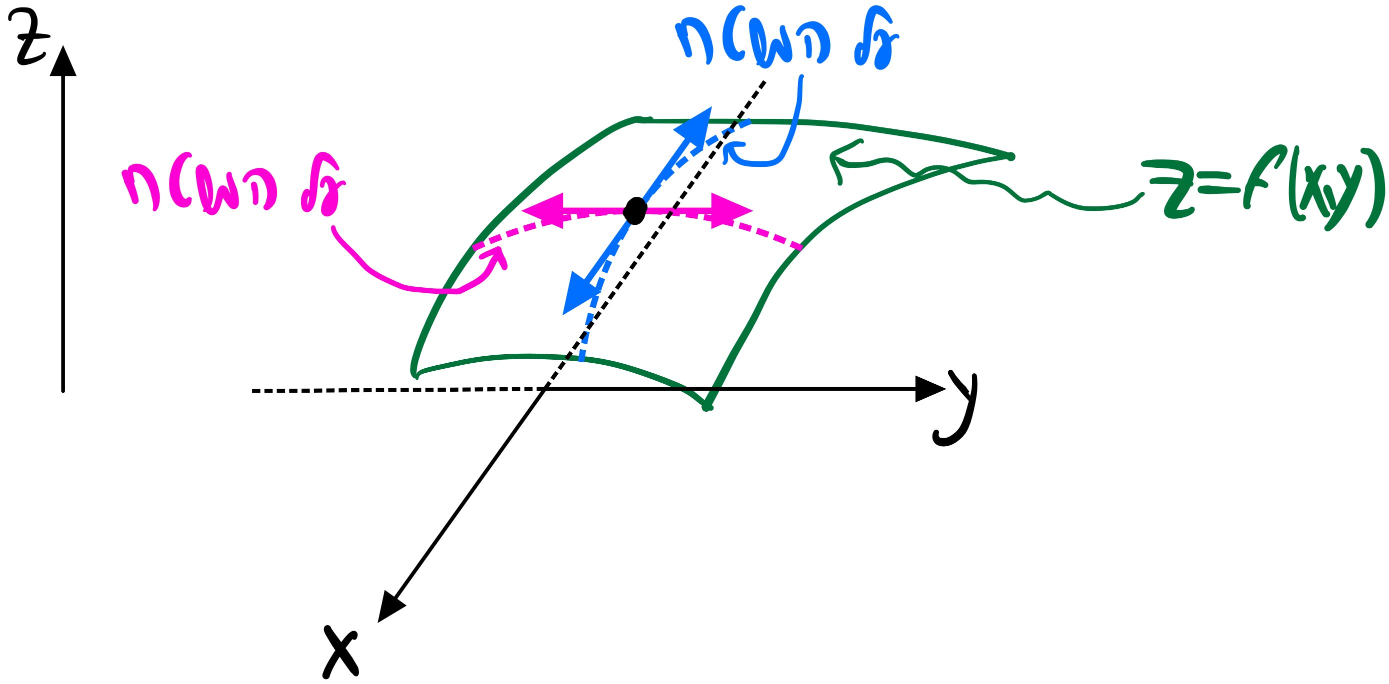
נגזרת לפי y

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h} = \underset{(x_0,y_0)\text{ בנקודה } y \text{ נגזרת חלקית לפי}}{=} f_y(x_0,y_0) = \left.\frac{df}{dy}\right|_{(x_0,y_0)}$$

כשגוזרים לפי y אז x הוא קבוע. מתייחסים אליו כמספר.

(אם ניתן - גוזרים לפי כללי הגזירה הרגילים).

נגזרות חלקיות-הצגה גיאומטרית



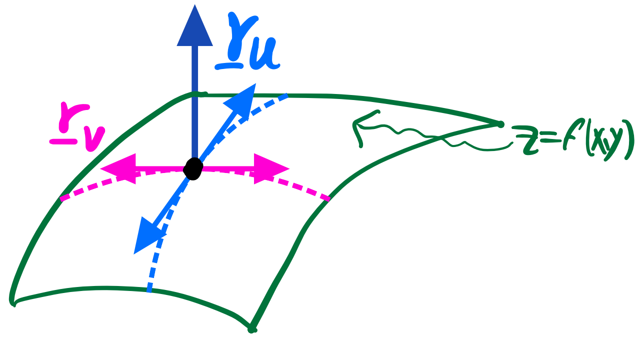
f_x - שיפוע המשיק של העקומה הכחולה בכיוון x

f_y - שיפוע המשיק של העקומה הורודה בכיוון y

נגזרות חלקיות של משטח בהצגה פרמטרית

זה משטח בהצגה פרמטרי

$$\underline{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$$



נגזרת לפי u $\quad \underline{r_u}(u,v)=(x_u,y_u,z_u)$

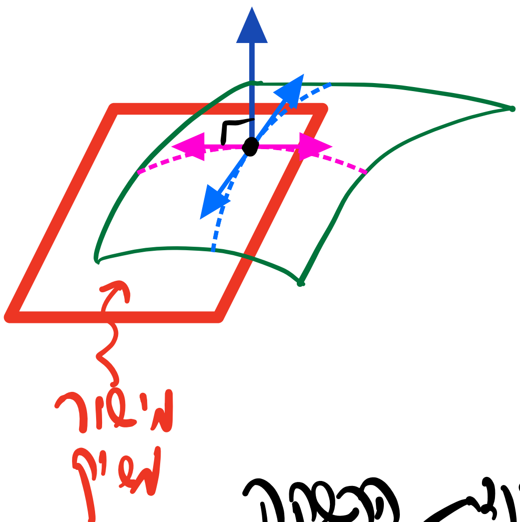
נגזרת לפי v $\quad \underline{r_v}(u,v)=(x_v,y_v,z_v)$

זה חשוב מאוד... $\rightarrow$ $\boxed{\underline{r_u}\times\underline{r_v}= \text{נורמל משטח}}$

נגזרות חלקיות של משטח בהצגה מפורשת

נתון משטח בהצגה מפורשת $z=f(x,y)$.

נורמל של המישור הוא נורמל המשטח



$\boxed{(f_x,f_y,-1)= \text{נורמל משטח}}$ $\leftarrow$ אפשר להבין פרמטרי וגם עבור הצגה וקטורית – ומגיעים לזה.

מישור משיק למשטח

מישור משיק למשטח הוא המישור שעובר בנקודת ההשקה והנורמל שלו הוא נורמל המשטח.

דיפרנציאביליות

בתדווה 1 אמרנו פונקציה "גזירה". כעת - "דיפרנציאבילית".

גיאומטרית:

בתדווה 1 אם יש נגזרת בנקודה אז ניתן להעביר משיק בנקודה.

כאן אם דיפרנציאבילית בנקודה אז ניתן להעביר מישור משיק בנקודה.

אלגברית:

$f(x,y)$ תיקרא דיפרנציאבילית בנקודה (x,y) אם יש שתי פונקציות

$E_1(\Delta x,\Delta y)$, $E_2(\Delta x,\Delta y)$ שמקיימות:

$$f(x+\Delta x,\, y+\Delta y)-f(x,y)=f_x(x,y)\cdot\Delta x+f_y(x,y)\cdot\Delta y+E_1(x,y)\cdot\Delta x+E_2(x,y)\cdot\Delta y$$

ו- E_1,E_2 שואפות לאפס כאשר $\Delta x,\Delta y \to (0,0)$

משפט 16.4.3

רציפות היא תנאי הכרחי לדיפרנציאביליות (בדיוק כמו בתדווה 1)

$$\boxed{\text{דיפרנציאביליות} \Rightarrow \text{רציפות}}$$

משפט 16.4.4

אם הנגזרות החלקיות f_x,f_y רציפות אז הפונקציה דיפרנציאבילית.

$$\boxed{f_x,f_y\ \text{רציפות} \Rightarrow \text{דיפרנציאביליות}}$$

כלל השרשרת לגזירה

דו מימד
16.4.7
עמוד 267

נתונה $z=f(x,y)$ ונניח ש $x=x(t)$, $y=y(t)$.

אם כך $z(t)=f(x(t),y(t))$.

נציג את הנגזרת:

$$z'(t)=f_x(x(t),y(t))\cdot x'(t)+f_y(x(t),y(t))\cdot y'(t)$$

גוזרים מבחוץ פנימה (עבור פונקציה דיפרנציאבילית היטב כמובן)

תלת מימד
16.7.3
עמוד 291

נתונה $f(x,y,z)$ ונניח ש $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$.

אם כך $f(x(t),y(t),z(t))=g(t)$.

נציג את הנגזרת:

$$g'(t)=f_x\cdot x'(t)+f_y\cdot y'(t)+f_z\cdot z'(t)$$

גוזרים מבחוץ פנימה (עבור פונקציה דיפרנציאבילית היטב כמובן)

כלל השרשרת לנגזרת

נגזרת לאורך עקומה

נתונה עקומה במרחב:

עקומה במרחב $\underline{r}(t)=(t,t,at)$

נתונה פונקציה $T(x,y,z)$ שמייצגת טמפרטורה על העקומה.

מכל t שנבחר נקבל נקודה אחרת על העקומה ולכן טמפרטורה אחרת

נגדיר:

קצב שינוי הטמפרטורה כשהולכים על העקומה

$$\boxed{\frac{dT}{dt}=T_x\cdot x_t+T_y\cdot y_t+T_z\cdot z_t}$$

כללי השרשרת לנגזרה

כלל שרשרת 8.4.16 – עמוד 370

תהי $z=f(x,y)$ פונקציה של שני המשתנים (x,y). (נגזרת משתנה)

כך ש: $y=y(u,v)$ $\quad x=x(u,v)$

$$z=f(x,y)=f(x(u,v),y(u,v))=z(u,v)=g(u,v)$$

$$\boxed{\begin{aligned} z_u &= f_x\cdot x_u+f_y\cdot y_u \\ z_v &= f_x\cdot x_v+f_y\cdot y_v \end{aligned}}$$

גרדיינט + נגזרת כיוונית סעיף 16.6 עמוד 983

נתונה פונקציה f.

$$\boxed{\text{גרדיינט} = grad(f) = \nabla f = \text{וקטור הנגזרות החלקיות}}$$

2 משתנים $f(x,y) = \nabla f = (f_x, f_y)$

3 משתנים $f(x,y,z) = \nabla f = (f_x, f_y, f_z)$

<u>דוגמא:</u>

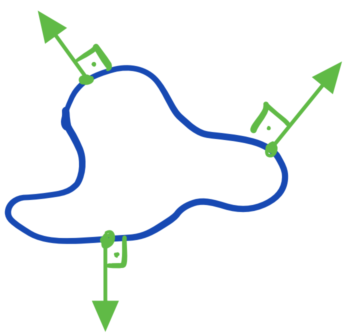
גוזרים חלקית ∇

$$f = (x^2, 3y^2, 4z)$$
$$\nabla f = (2x, 6y, 4)$$

הגרדיינט תמיד ניצב ל... נורמל ל...

<u>במימד 2:</u>

∇f ניצב לקו גובה $f(x,y)=c$ <u>במישור</u>.

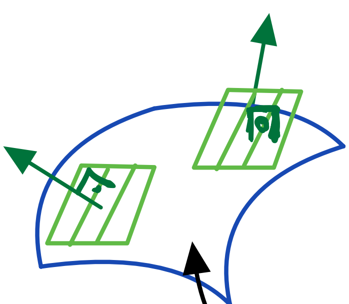


<u>במימד 3:</u>

∇f ניצב למשטח רמה $f(x,y,z)=c$

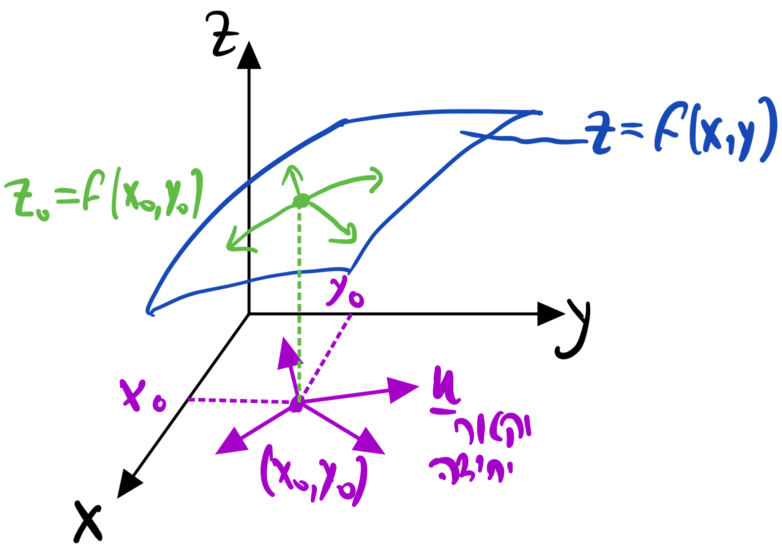
כלומר ∇f היא נורמל למשטח

כלומר ∇f היא נורמל למישור המשיק למשטח.



גרדיינט + נגזרת כיוונית סעיף 16.6 עמוד 283

נגזרת כיוונית:



1. בן אדם על הרצפה.
2. הולך בכיוון $\underline{u}$ וקטור יחידה.
3. בן אדם אחר על המשטח.
4. הולך באותו כיוון.
5. על המשטח מרגישים עלייה/ירידה בהתאם לכיוון...

$\boxed{\text{נגזרת כיוונית של } f \text{ בכיוון } \underline{u} = \text{קצב השינוי של המשטח בכיוון וקטור } \underline{u}.}$

הגדרה:

$\|\underline{u}\|=1$

$\underline{u}$ וקטור יחידה.

$$\underbrace{D_{\underline{u}}}_{\text{נגזרת כיוונית בכיוון } \underline{u}} \overbrace{f}^{\text{של } f}(x,y) = \underbrace{\overbrace{\nabla f}^{\text{גרדיינט בנקודה}} \cdot \overbrace{\underline{u}}^{\text{כיוון } \underline{u}}}_{\text{מכפלה סקלרית}} = \text{מספר!}$$

$$\underbrace{D_{\underline{u}}}_{\text{נגזרת כיוונית בכיוון } \underline{u}} \overbrace{f}^{\text{של } f}(x,y,z) = \overbrace{\overbrace{\nabla f}^{\text{גרדיינט בנקודה}} \cdot \overbrace{\underline{u}}^{\text{כיוון } \underline{u}}} = \text{מספר!}$$

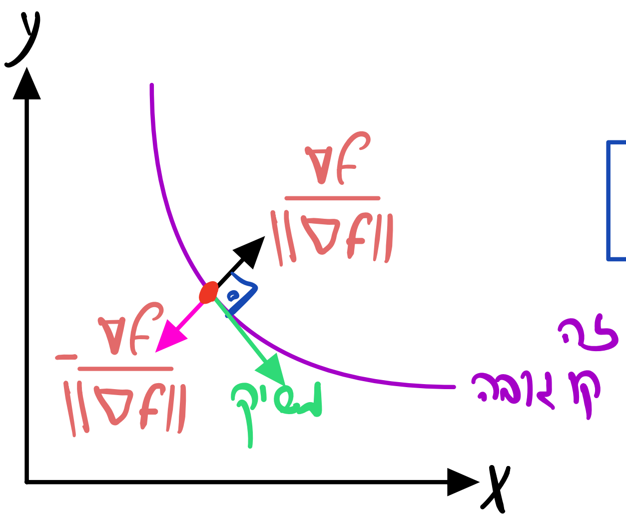
אם הנגזרת חיובית – המשטח עולה!

אם הנגזרת שלילית – המשטח יורד!

גרדיינט + נגזרת כיוונית סעיף 16.6 עמוד 283

נגזרת כיוונית:

נשתמש בהגדרה של מכפלה סקלרית:



$$\boxed{D_u f = \nabla f \cdot u = \underbrace{\|\nabla f\|}_{\text{גודל חיובי}} \cdot \underbrace{\|u\|}_{\text{גודל } 1} \cdot \cos\theta}$$

יש לנו שליטה על זווית θ ∇ הזווית בין הגרדיינט לכיוון.

בכיוון הגרדיינט:

$$D_u f = \nabla f \cdot u = \underbrace{\|\nabla f\| \cdot \|u\| \cdot \underbrace{\cos(0^\circ)}_{1}}_{max}$$

נגזרת כיוונית מקסימלית

בכיוון מנוגד לגרדיינט:

$$D_u f = \nabla f \cdot u = \underbrace{\|\nabla f\| \cdot \|u\| \cdot \underbrace{\cos(\pi)}_{-1}}_{min}$$

נגזרת כיוונית מינימלית

בכיוון ניצב לגרדיינט:

$$D_u f = \nabla f \cdot u = \underbrace{\|\nabla f\| \cdot \|u\| \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{0}}_{zero}$$

נגזרת כיוונית שווה 0

גרדיאנט + נגזרת כיוונית סע' 16.6 עמוד 283

נגזרת כיוונית – סיכום:

מנורמל...

* נגזרת כיוונית של $f(x,y)$ בנקודה מסוימת בכיוון $\underline{u}$ $(\|\underline{u}\|=1)$ נתונה ע"י:

$$\boxed{D_u f = \nabla f \cdot \underline{u}}$$

---

* הנגזרת הכיוונית היא **מקסימלית** אם $\underline{u}$ הוא בכיוון ∇f.
כלומר עבור $u=\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ (מנרמלים את $\underline{u}$ וקטור יחידה).
מילים אחרות:
הנגזרת הכיוונית היא **מקסימלית** אם u ניצב לקו הגובה $f=k$

---

* הנגזרת הכיוונית היא **מינימלית** אם $\underline{u}$ הוא בכיוון $-\nabla f$.
כלומר עבור $u=-\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ (מנרמלים את $\underline{u}$ וקטור יחידה).
מילים אחרות:
הנגזרת הכיוונית היא **מינימלית** אם u ניצב לקו הגובה $f=k$
(בכיוון המנוגד ל- ∇f)

---

* הנגזרת הכיוונית היא אפס כשהולכים בכיוון ניצב לגרדיאנט/משיק לקו הגובה.

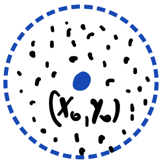
---

* **גודל** הנגזרת הכיוונית המקסימלית הוא גודל הגרדיאנט $\|\nabla f\|$

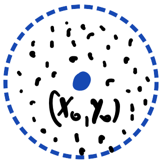
$$D_u f = \nabla f \cdot \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \|\nabla f\|$$

קיצון מקומי סעיף 16.4 עמוד 305

אם $f(x_0,y_0) \ge f(x,y)$ לכל (x,y) בסביבה של (x_0,y_0)
אז (x_0,y_0) מקסימום מקומי של f.



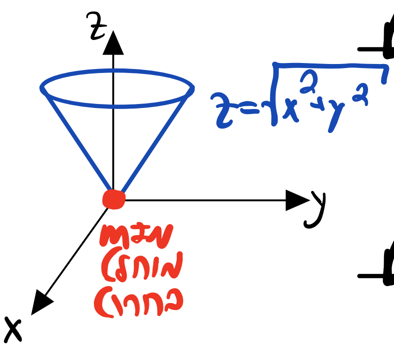
אם $f(x_0,y_0) \le f(x,y)$ לכל (x,y) בסביבה של (x_0,y_0)
אז (x_0,y_0) מינימום מקומי של f.



כמו קיצון מקומי בחדו"א 1 בסביבה נקובה

אם $f(x_0,y_0) \ge f(x,y)$ לכל (x,y) בתחום D
אז (x_0,y_0) מקסימום מוחלט של f.

אם $f(x_0,y_0) \le f(x,y)$ לכל (x,y) בתחום D
אז (x_0,y_0) מינימום מוחלט של f.



כמו קיצון מוחלט בחדו"א 1 בקטע סגור

קיצון מקומי סעיף 16.4 עמוד 305

תנאי הכרחי לקיצון מקומי:

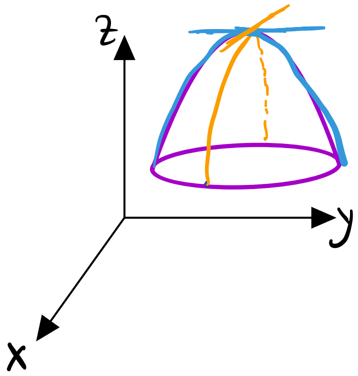
1. אין נגזרות חלקיות בנקודה ("שפיצים")

2. $\nabla f = \underline{0}$ כלומר: $f_x = 0$

$f_y = 0$

$f_z = 0$

פותרים את מערכת המשוואות ומוצאים חשודות



משפט 16.4.5 - תנאי מספיק לקיצון מקומי פנימי של $f(x,y)$.
בונים את המבחן הבא:

$$\boxed{\text{סימון} \rightarrow D = f_{xx}\cdot f_{yy} - f_{xy}^2}$$

נקודה חשודה (x_1,y_1)

$\nabla f(x_1,y_1) = (0,0)$

$$D(x_1,y_1) = f_{xx}(x_1,y_1)\cdot f_{yy}(x_1,y_1) - f_{xy}^2(x_1,y_1)$$

$D>0 \rightarrow$ קיצון מקומי $\rightarrow$ $f_{xx}(x_1,y_1)>0$ min ; $f_{xx}(x_1,y_1)<0$ max

$D<0 \rightarrow$ אוכף. לא קיצון מקומי

$D=0 \rightarrow$ לא ניתן לדעת - חושבים על דרך אחרת

כופלי לגרנז' - קיצון תחת אילוץ - ספר 16.9 עמוד 318

בהינתן פונקציה שאת $f(x,y,z)$ שמחפשים לה <u>מינימום/מקסימום</u>

<u>תחת האילוץ</u>: $g(x,y,z)=c$, אז הכרחי קיום $\lambda\neq 0$ כך ש:

כופל לגרנז'

מערכת תנאי הכרחי לפתרון הבעיה

$$\begin{cases} f_x=\lambda\cdot g_x \\ f_y=\lambda\cdot g_y \\ f_z=\lambda\cdot g_z \\ g(x,y,z)=c \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} \nabla f=\lambda\cdot\nabla g \\ g(x,y,z)=c \end{matrix} \longrightarrow$$

כתיבה אחרת

פותרים את המערכת ומוצאים נקודות קיצון עם λ מתאים

λ_1: (x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2), (x_3,y_3,z_3)	λ_2: (x_6,y_6,z_6), (x_7,y_7,z_7), (x_8,y_8,z_8)

<u>שלבי הפתרון</u>:

1. מבינים את הבעיה שלפנינו.
2. מגדירים מי היא פונקציית המטרה.
3. מגדירים מי הוא האילוץ.
4. בונים את המשוואות ופותרים את המערכת.

<u>דגש חשוב</u> - פותרים בזהירות. לא לפספס פתרונות.