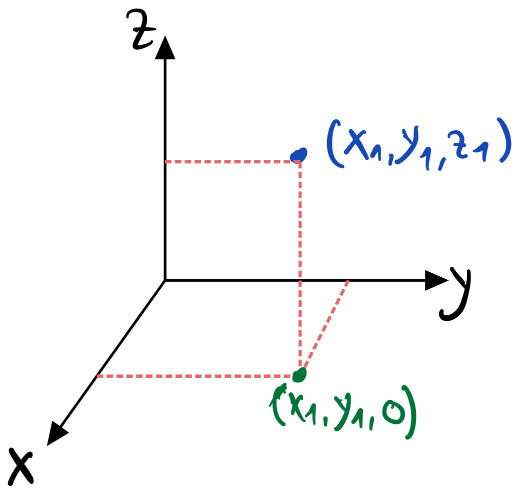
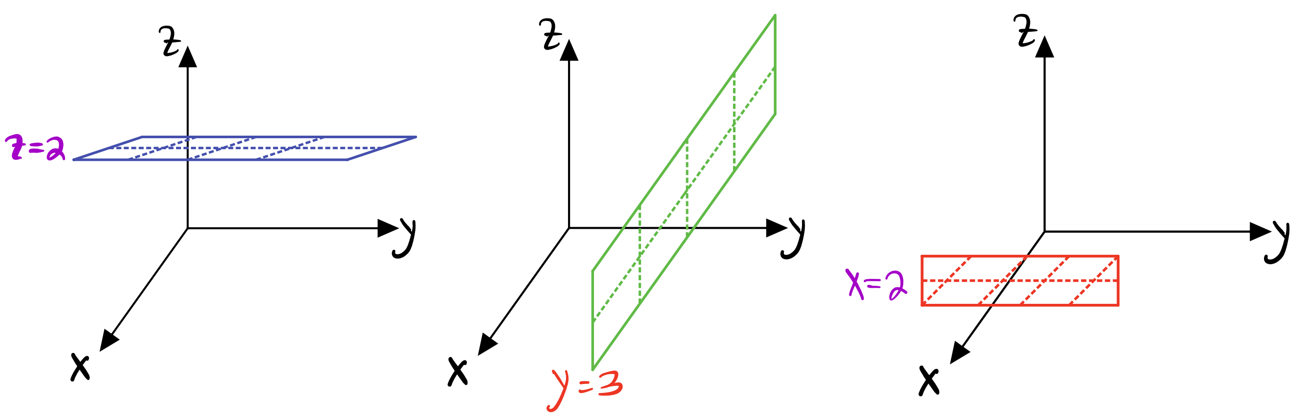
סיכום פרק 14 המרחב התלת-מימדי; וקטורים

אפיון נקודה במרחב:

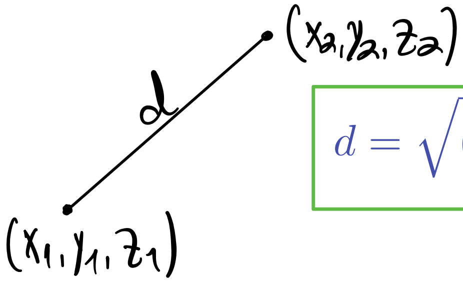
3 רכיבים לכל נקודה...



מישורים מקבילים לצירים:



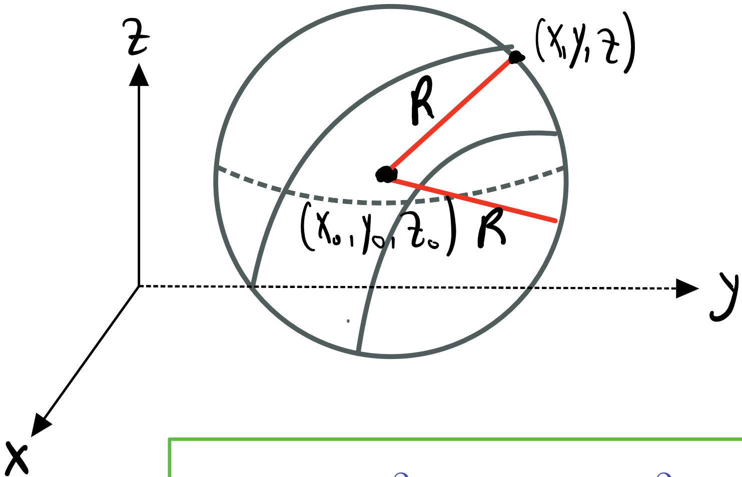
מרחק בין נקודות:



$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

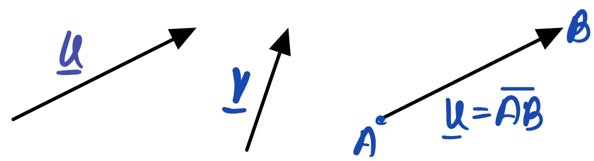
כדור:

קבוצת נקודות שנמצאת במרחק שווה לנקודה מסוימת שנקראת מרכז כדור.



$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

וקטור = חץ עם כיוון וגודל



$\underline{u}=\underline{v}$: אותו כיוון, אותו גודל

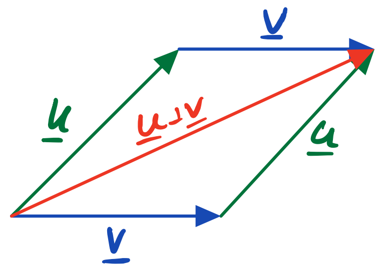
$\underline{u}=\lambda\cdot\underline{v}$: λ הוא מספר קבוע. הוקטור $\underline{u}$ מתקבל מוקטור אחר $\underline{v}$ ע"י כפל בקבוע. $0\neq\lambda$.
במצב זה נגיד שהוקטורים $\underline{u},\underline{v}$ מקבילים.

הוקטור הנגדי : אותו וקטור בכיוון ההפוך.

חיבור וקטורים :

נתונים $\underline{u}$ ו $\underline{v}$:

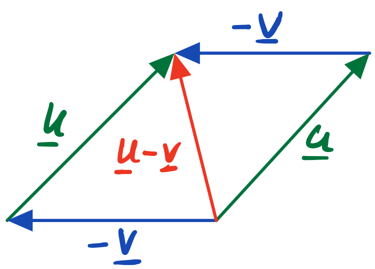
$\underline{u}+\underline{v}=$



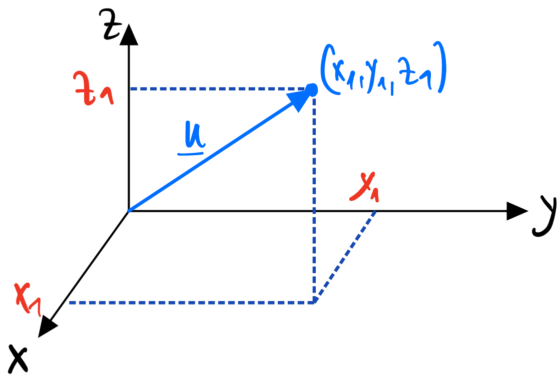
חיסור וקטורים :

נתונים $\underline{u}$ ו $\underline{v}$:

$\underline{u}-\underline{v}=$



מיקום וקטורים במערכת צירים :



וקטור יסומן עם סוגריים <u>משולשים</u>:

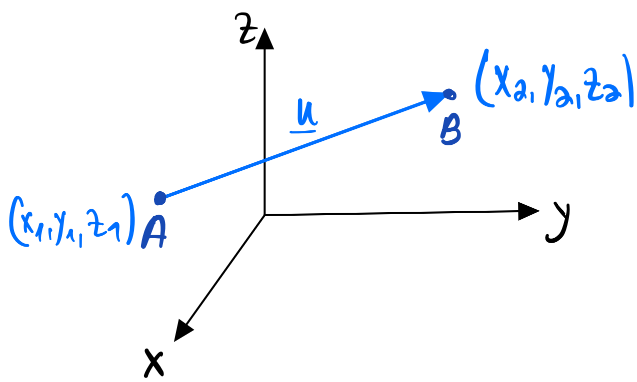
$$\underline{u} = \langle x_1, y_1, z_1 \rangle$$

נקודה תסומן עם סוגריים <u>רגילים</u> :

$$P = (x_1, y_1, z_1)$$

אלה קואורדינטות קרטזיות (רכיבים)

ביטוי הפרש וקטורים בכלל :

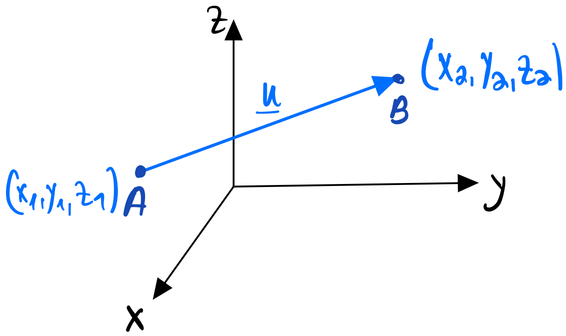


$$\underline{u} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

אנחנו מבינים שמיקום הוקטור לא באמת משנה.
הגודל של/הכיוון שלו נשארים אותו דבר.

אורך של וקטור = נורמה

אורך של $\underline{u}$ יסומן $\|\underline{u}\|$.



$$\boxed{\text{אורך של הוקטור } \underline{u} = \|\underline{u}\| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}$$

וקטור האפס:

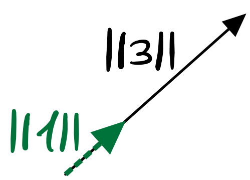
$\underline{u}=0$ אם ורק אם $\|\underline{u}\|=0$

נרמול וקטור = מעבר מוקטור $\underline{u}$ לוקטור יחידה בכיוון $\underline{u}$.

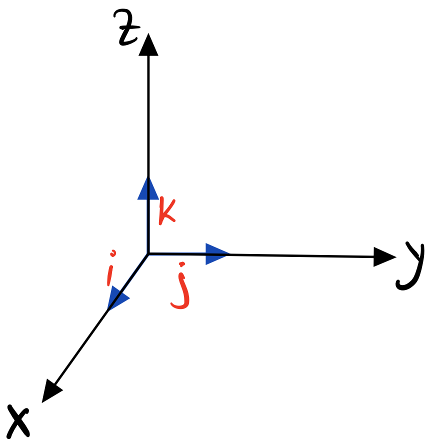
מתקיים אם הוקטור בגודל שו0 .

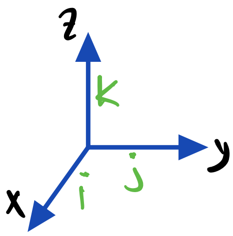
$\frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|}$ מייצג וקטור באורך 1 באותו כיוון

$\underline{v}\cdot\frac{1}{\|\underline{v}\|}$ תצורה נוספת



וקטורי יחידה סטנדרטיים במרחב :





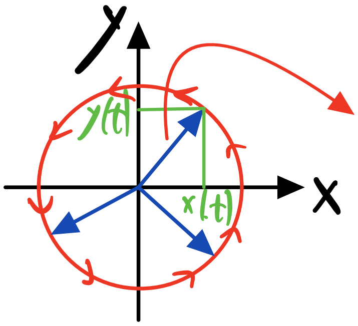
$i = \langle 1,0,0 \rangle$

$j = \langle 0,1,0 \rangle$

$k = \langle 0,0,1 \rangle$

וקטורים <u>באורך 1</u> <u>ובכיוון הצירים</u> .

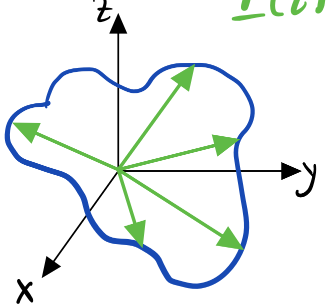
הצגה פרמטרית של עקומה במישור :



$$\underline{r}(t) = x(t)\,i + y(t)\,j = (x(t), y(t))$$

הצגה פרמטרית של עקומה במרחב :

$$\underline{r}(t) = x(t)\,i + y(t)\,j + z(t)\,k = (x(t), y(t), z(t))$$



פעולות בוקטורים:

מכפלה סקלרית = מכפלה פנימית = Dot

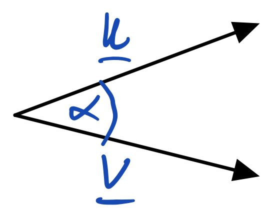
הסימון הוא נקודה: "•"

הגדרה:

מכפלה סקלרית

$$\boxed{\underline{u}\cdot\underline{v} = \|\underline{u}\|\cdot\|\underline{v}\|\cdot\cos\alpha}$$

כאשר α היא הזווית בין הוקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.



סקלר = מספר

מכאן נובע ש:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{\|\underline{u}\|\cdot\|\underline{v}\|}}$$

אם $\alpha = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$ אז $\underline{u}\cdot\underline{v} = 0$

תוצאת המכפלה הסקלרית היא מספר!

משפט: $\underline{u}\perp\underline{v} \iff \underline{u}\cdot\underline{v}=0$

וקטור האפס $\underline{0}$ מאונך לכל וקטור אחר כי אין לו כיוון מוגדר.

הקשר בין Dot Product לבין אורך של וקטור:

נבצע מכפלה סקלרית של וקטור עם עצמו:

כאשר α - זווית בין הוקטור לעצמו שווה 0°.

$$\boxed{\underline{u}\cdot\underline{u}=\|\underline{u}\|\cdot\|\underline{u}\|\cdot\cos\alpha}$$

$$\underline{u}\cdot\underline{u}=\|\underline{u}\|^2\cdot 1$$

$$\boxed{\|u\|=\sqrt{\underline{u}\cdot\underline{u}}}$$

אורך הוקטור = שורש המכפלה הסקלרית

מכפלה סקלרית - חישוב ישיר:

נתונים שני וקטורים:

$$\underline{u}=\langle u_1,u_2,u_3\rangle \quad \underline{v}=\langle v_1,v_2,v_3\rangle$$

$$\boxed{\underline{u}\cdot\underline{v}=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3}$$

מכפלה סקלרית – תכונות:

$\underline{u}\cdot\underline{v}=\underline{v}\cdot\underline{u}$ (חילופיות)

כמו חוק הפילוג $\{\ \underline{u}\cdot(\alpha\underline{v}+\underline{z})=\underline{u}\cdot\alpha\underline{v}+\underline{u}\cdot\underline{z}$ (לינאריות)

$=\alpha\cdot\underline{u}\cdot\underline{v}+\underline{u}\cdot\underline{z}$

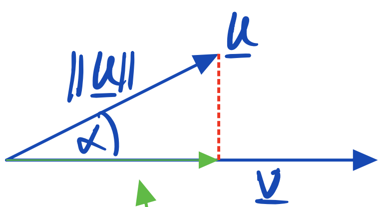
$\underline{i}\cdot(\underline{j}+\underline{k})=\underline{i}\cdot\underline{j}+\underline{i}\cdot\underline{k}=0+0=\underline{\underline{0}}$

וקטורי יחידה בכיוון הצירים $\{\ i\cdot j=0$ וגם $i\cdot k=0$ וגם $j\cdot k=0$

וקטור היטל:

נתונים ו- $\underline{u}$ על $\underline{v}$

צריך למצוא נוסחה עבור היטל.



זה וקטור ההיטל
היטל $\underline{u}$ על $\underline{v}$.

וקטור ההיטל $\rightarrow$ $\boxed{\underline{p}=\dfrac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{\underline{v}\cdot\underline{v}}\cdot\underline{v}}$ או $\boxed{\underline{p}=\dfrac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{\|v\|^2}\cdot\underline{v}}$

מכפלה וקטורית:

מכפלה וקטורית $= \underline{u} \times \underline{v}$ (cross)

תוצאת המכפלה הוקטורית היא <u>וקטור</u>! (ניצב למכפלה הוקטורית)

<u>נתונים הוקטורים:</u>

$$\underline{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \qquad \underline{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$$

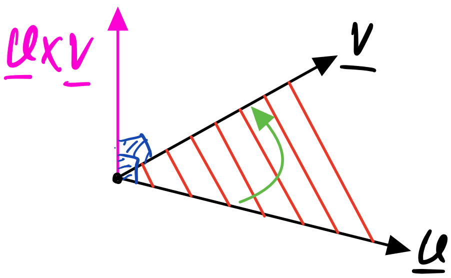
$$\underline{u} \times \underline{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{= i(u_2 v_3 - u_3 v_2) - j(u_1 v_3 - u_3 v_1) + k(u_1 v_2 - u_2 v_1)}$$

מכפלה וקטורית:

$\underline{u}\times\underline{v}$ היא הוקטור שניצב למישור שפורשים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$

כיוונו נקבע עפ"י כלל היד הימנית.



{איור 14.4.4 עמוד 120}

משפט: הוקטור $\underline{u}\times\underline{v}$ ניצב לכל אחד מהוקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.

כלומר: $\underline{u}\times\underline{v}\perp\underline{v}$ וגם $\underline{u}\times\underline{v}\perp\underline{u}$

אזכר: $(\underline{u}\times\underline{v})\cdot\underline{v}=0$ וגם $(\underline{u}\times\underline{v})\cdot\underline{u}=0$

משפט: שני וקטורים $\underline{a},\underline{b}$ מקבילים זה לזה אם ורק אם $\underline{a}\times\underline{b}=0$

$$\underline{a}\parallel\underline{b}\iff\underline{a}\times\underline{b}=0$$

$\lambda\underline{v}\times\underline{v}=\lambda\cdot\underline{0}=\underline{0}$, $\underline{u}\times\underline{v}=0$ מקבילים , $\underline{u}=\lambda\underline{v}$ מקבילים , $\underline{u}\times\underline{u}=0$ צויים.

מכפלה וקטורית – תכונות:

$$\underline{u} \times \underline{v} = -\underline{v} \times \underline{u}$$

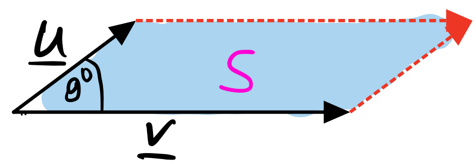
כמו חוק הפילוג $\left\{ \underline{u} \times (\underline{a}+\underline{b}) = \underline{u} \times \underline{a} + \underline{u} \times \underline{b} \right.$

משפט:

$$\underbrace{\|\underline{u} \times \underline{v}\|}^{\text{גודל המכפלה הוקטורית}} = \|\underline{u}\| \cdot \|\underline{v}\| \cdot \sin\theta$$

כאשר θ היא הזווית בין הוקטורים.

משמעות גיאומטרית: זהו שטח המקבילית!



ישר במרחב תלת מימדי - 14.5

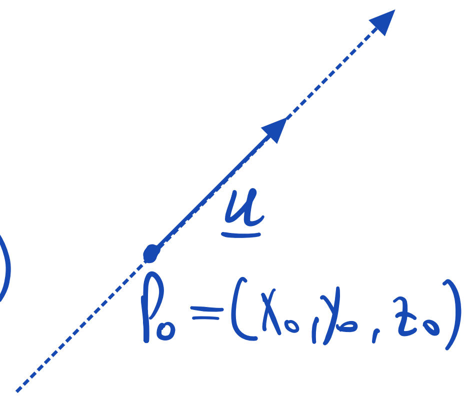
ישר במרחב - מוצגים בעזרת נקודה וכיוון.

$$\boxed{\underline{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = \underbrace{P_0}_{\text{נקודה בישר}} + \underbrace{t}_{\text{פרמטר}} \cdot \underbrace{\underline{u}}_{\text{כיוון הישר}}}$$

$$\underline{r}(t) = P_0 + t\langle u_1, u_2, u_3 \rangle$$

$$\underline{r}(t) = (x_0, y_0, z_0) + t\langle u_1, u_2, u_3 \rangle$$

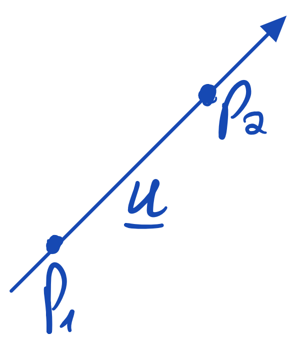
$$\underline{r}(t) = (\underbrace{x_0 + tu_1}_{x(t)}, \underbrace{y_0 + tu_2}_{y(t)}, \underbrace{z_0 + tu_3}_{z(t)})$$



אם נתונות 2 נקודות, נמצא בעזרתן את הכיוון.

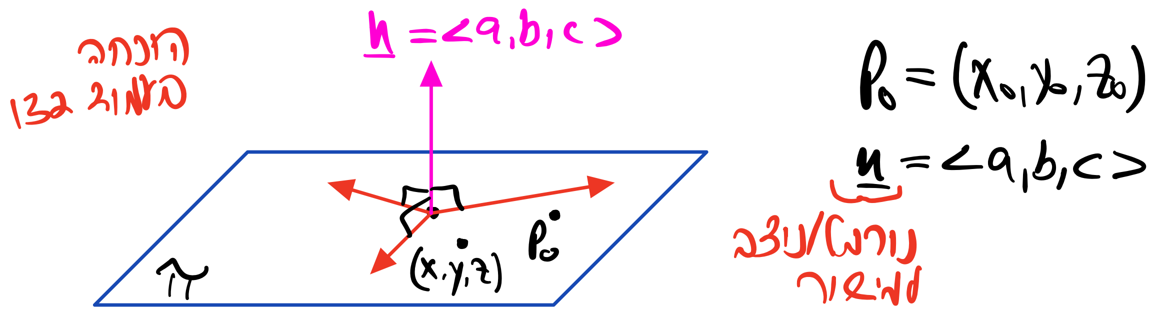
$$\underline{u} = P_2 - P_1$$

$$\underline{r}(t) = P_1 + t\underline{u}$$ ונציב פרמטרים



מישורים במרחב - 14.6

המישור הוא המקום הגיאומטרי של כל הוקטורים שניצבים לוקטור נתון, עם המישור עובר בנקודה מסוימת.



מקבלים משוואת המישור הכללית הבאה:

$$\boxed{ax+by+cz=d}$$

המקדמים a,b,c הם <u>שיעורי הנורמל למישור</u>.

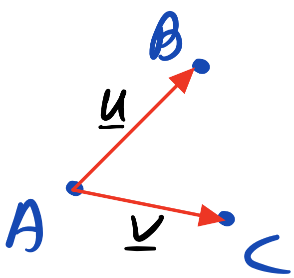
(x,y,z) היא <u>כל נקודה שנמצאת במישור</u>.

d- מספר.

מישורים במרחב - 14.6

מישור נקבע ע"י 3 נקודות שלא נמצאות על אותו ישר.

דרך הנקודות עובר <u>מישור אחד ויחיד</u>.



בהינתן 3 נקודות שלא על אותו ישר, נלמד 2 דרכים למצוא את משוואת המישור:

דרך ראשונה:

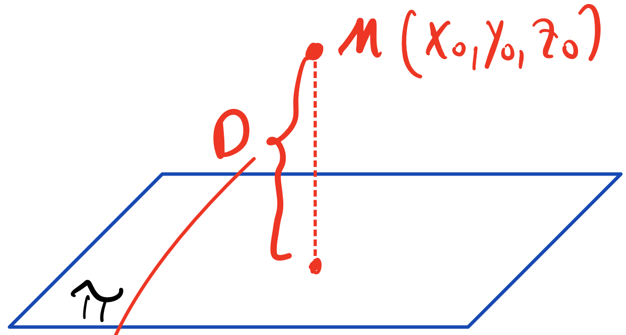
1. נחשב וקטורים $\underline{u}, \underline{v}$ כמו בתרגילים (באדום)
2. נחשב $\underline{u} \times \underline{v}$ למציאת $\underline{n}$ (נורמל).
3. נציב את אחת הנקודות הנתונות במשוואת המישור למציאת d.

דרך שניה:

1. המישור הכללי הוא: $\pi_1: ax+by+cz=d$
2. נציב 3 נקודות במישור הכללי.
3. פותרים מערכת משוואות למציאת הפרמטרים a,b,c,d וסיימנו.

נקודות נתונות
$$\begin{cases} A=(a_1,a_2,a_3) \\ B=(b_1,b_2,b_3) \\ C=(c_1,c_2,c_3) \end{cases}$$

מרחק נקודה ממישור – 14.6.2 עמוד 135



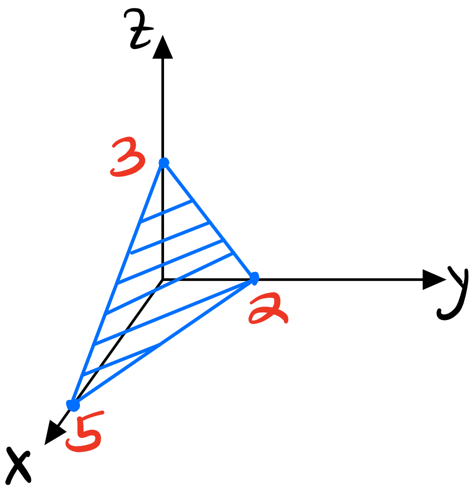
M(x_0,y_0,z_0) נקודה שלא על המישור.

נתון מישור π: $ax+by+cz-d=0$.

$$\boxed{D=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

שים לב – הנוסחא דורשת שבאגף ימין של המישור יהיה כתוב 0.

המישור הקלאסי:



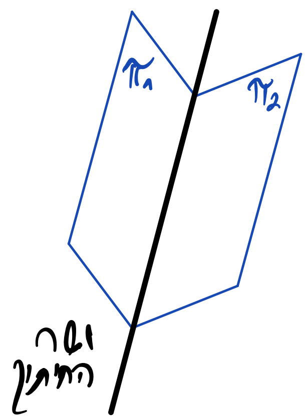
מישור "שמונח" על ראשי הצירים.

משוואתו היא:

$$\boxed{\frac{x}{5}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1} \quad /\cdot 30$$

$$6x+15y+10z=30$$

ישר חיתוך בין מישורים:



ישר החיתוך מוצג כך:

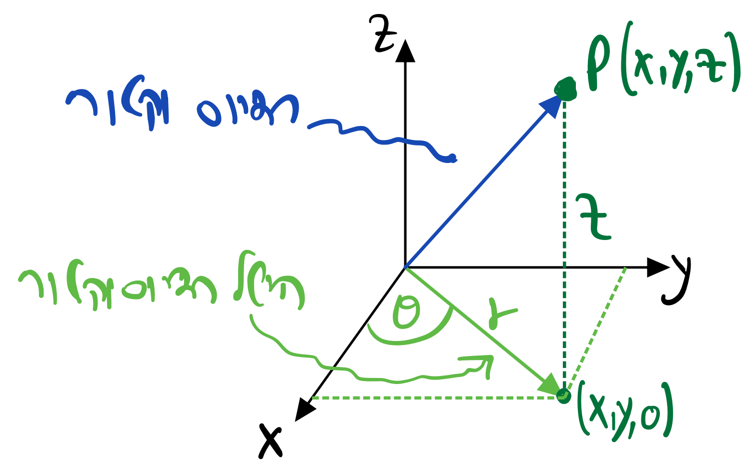
$$\boxed{\text{וגם}\begin{cases}\pi_1: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0\\ \pi_2: a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0\end{cases}}$$

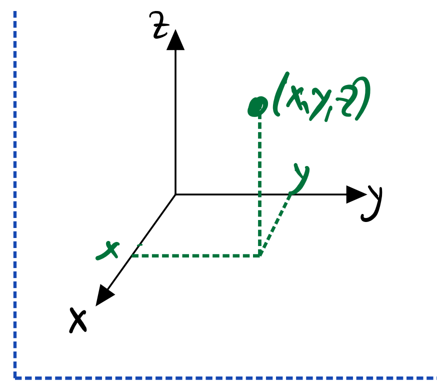
יתנו לנו שני מישורים ויוצרו שבה <u>ישר</u>.

נמצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך ב-2 דרכים שונות:

1. פתרון מערכת המשוואות.
2. שימוש בנורמלים ובנקודה משותפת לשני המישורים.

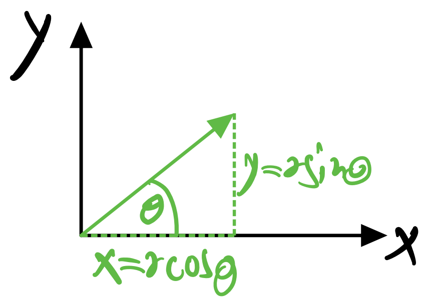
קואורדינטות גליליות





הטל מישור xy

θ זווית בין ציר x חיובי
לבין הטל הרדיוס וקטור לנקודה



מערכת גלילית

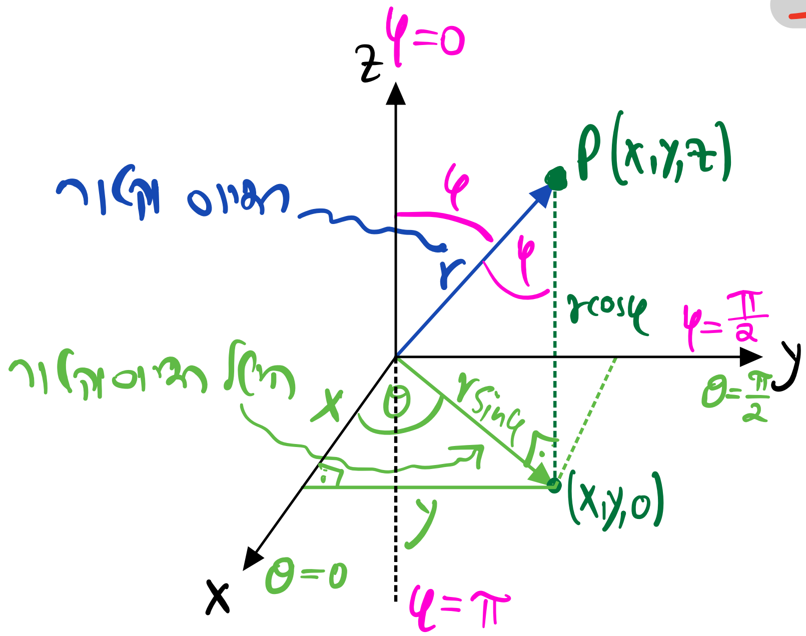
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

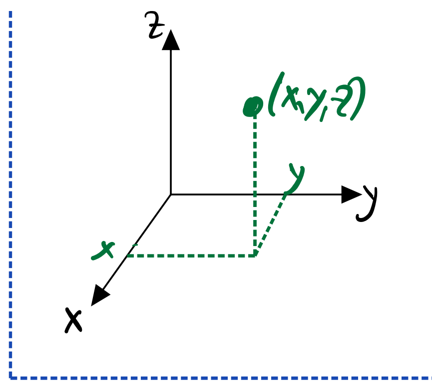
$0 \le \theta \le 2\pi$

$r \ge 0$

z - כל מספר

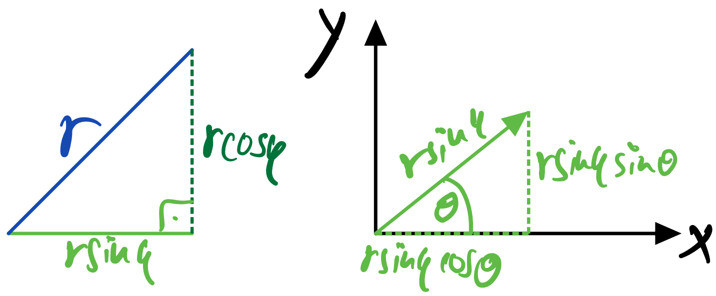
קואורדינטות כדוריות





היטל מישור xy

φ זווית בין ציר z חיובי וימינה	θ זווית בין ציר x חיובי ובין היטל הרדיוס מקור לנקודה



מעבר כדורי

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

$0 \le \varphi \le \pi$
$0 \le \theta \le 2\pi$
$r \ge 0$