# סיכום חדו"א לכלכלה וניהול - 10142

**גרסה 1.2 – 17.6.2023**

# תוכן עניינים

# פונקציית הקו הישר

פונקציית הקו הישר היא פונקציה ש"משתנה באופן אחיד/לינארי".
קו ישר הוא אוסף של אינסוף נקודות שמונחות בכיוון קבוע זו ביחס לזו.

השינוי במספר יחידות ה- $y$ על כל יחידה של $x$ נקרא שיפוע הישר ומסומן באות $m$ .

המבנה הכללית של פונקציית הקו הישר:

$$\boxed{y = mx + n}$$

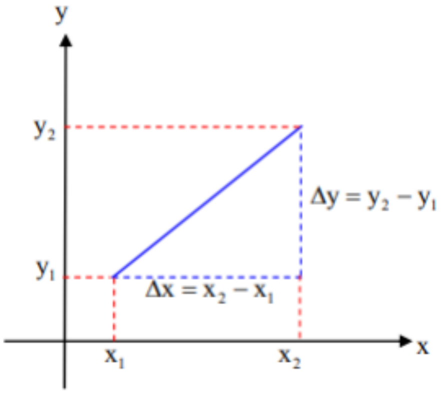
במילים אחרות, כל קו ישר במישור, יהיה מיוצג ע"י המבנה הזה. **יש לזהות ויזאולית(!).**

שיפוע הישר $m$, מחושב על ידי:

$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

<u>כאשר:</u>

$(x_1, y_1)$ – **שיעורי נקודה אחת** שנמצאת על הישר.
$(x_2, y_2)$ – **שיעורי נקודה שנייה** שנמצאת על הישר.




מצבים שונים של $m$ והשפעה על הגרף:

- כאשר השיפוע <u>**$m$ חיובי**</u> הפונקציה הקווית <u>**עולה**</u> (בדוגמא משמאל)
- כאשר השיפוע <u>**$m$ שלילי**</u> הפונקציה הקווית <u>**יורדת**</u>
- כאשר השיפוע <u>**$m$ הוא אפס**</u> הפונקציה הקווית <u>**קבועה (אופקית)**</u>

הפרמטר $n$, המקדם החופשי בפונקציית הקו הישר, הוא ערך הפונקציה כאשר $x = 0$.
במילים אחרות, הוא מהווה את **נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה-$y$** בייצוג הגרפי.
שיעורי נקודה זו הם $(0, n)$ .

<u>מקרים פרטיים:</u>

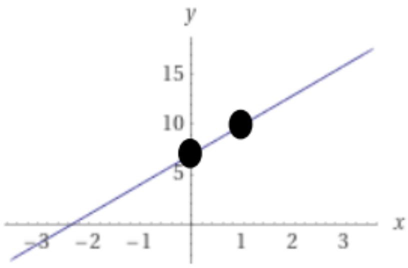
- **שיפועו של ישר המקביל לציר $x$ הוא 0** (חישבו על זה לרגע) ולכן משוואתו היא $y = n$ .
  במילים אחרות – לכל הנקודות שעליו – שיעור $y$ זהה.
- **ישר שמקביל לציר ה-$y$** <u>**איננו גרף של פונקציה**</u> (!), ומשוואתו $x = a$ .
  לכל הנקודות עליו – שיעור $x$ זהה.

## <u>דוגמאות בעמוד הבא</u>

דוגמא ראשונה: $\boxed{g(x) = 3x + 7}$

$\boxed{m = 3}$
$\boxed{b = 7}$

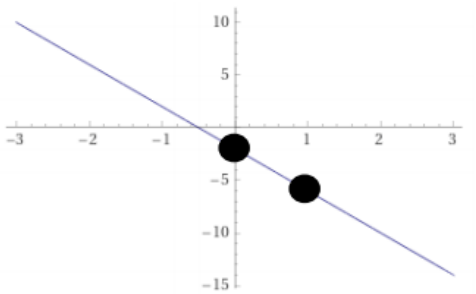
על מנת לצייר את הגרף נציב שני איקסים במשוואה לקבל תוצאות $y$.
כאשר $x = 0$, נקבל $g(x) = 7$ (זו נקודת החיתוך עם ציר $y$).
וכאשר $x = 1$, נקבל $g(x) = 10$




דוגמא שנייה: $\boxed{g(x) = -4x - 2}$

$\boxed{m = -4}$
$\boxed{b = -2}$

על מנת לצייר את הגרף נציב שני איקסים במשוואה לקבל תוצאות $y$.
כאשר $x = 0$, נקבל $g(x) = -2$ (זו נקודת החיתוך עם ציר $y$).
וכאשר $x = 1$, נקבל $g(x) = -6$




**<u>הערות חשובות:</u>**

- כל קו ישר הוא אינסופי – נוכל להמשיך אותו לשני הכיוונים.
- כל נקודה ה**נמצאת על גרף הפונקציה** נגיד עליה שהיא "מקיימת את הפונקציה".
במילים אחרות, כאשר נציב אותה במשוואה נקבל "פסוק אמת" – צד ימין שווה לצד שמאל.

<u>דוגמא:</u> בפונקציה $y = 3x + 8$ הנקודה $(1,11)$ מקיימת את הפונקציה.
מדוע? נציב: $3 \cdot 1 + 8 = 11$. קיבלנו $11 = 11$ – פסוק אמת, ולכן הנקודה היא חלק מהגרף – נמצאת עליו.
מה עם הנקודה $(2,3)$? נציב: $2 \cdot 3 + 8 = 3$. קיבלנו $14 = 3$. <u>לא נכון</u>. מסקנה: הנקודה לא נמצאת על הגרף.

**המשך בעמוד הבא**

# מציאת משוואת הישר



כאמור, אפשר להציג כל ישר במישור באופן חד-חד-ערכי על ידי:

- **שיפוע שלו + נקודה שעליו.**
- **שתי נקודות שעליו.**

**הנוסחא:** $\boxed{\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1)}}$

כאשר $\boldsymbol{m}$ הוא השיפוע ו- $(\boldsymbol{x_1, y_1})$ הם שיעורי נקודה כלשהי שנמצאת על הישר.

**דוגמא:**

**מצאו את משוואת הישר העובר בנקודה $(\boldsymbol{2, 3})$ ושיפועו 4.**

פתרון:

$$y - 3 = 4(x - 2)$$

$$y = 4x - 8 + 3$$

$$\boldsymbol{y = 4x - 5}$$

**דוגמא נוספת:**

**מצאו את משוואת הישר העובר בנקודה $(\boldsymbol{2, 3})$ וגם בנקודה $(\boldsymbol{0, 4})$.**

פתרון:

ראשית נמצא את השיפוע:

$$m = \frac{3-4}{2-0} = \frac{-1}{2} = -\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}$$

עכשיו נבחר את אחת הנקודות הנתונות, בהן הישר עובר: $(0,4)$ ונציב בנוסחא:

$$y - 4 = -\frac{1}{2}(x - 0)$$

$$\boldsymbol{y = -\frac{1}{2}x + 4}$$

1. **מצאו את משוואת הישר העובר בנקודה $(\boldsymbol{5, 6})$ וגם בנקודה $(\boldsymbol{1, 3})$.** { תשובה: $y = \frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$ }
2. **מצאו את משוואת הישר העובר בנקודה $(\boldsymbol{-1, 1})$ וגם בנקודה $(\boldsymbol{-3, -2})$.** { תשובה: $y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$ }
3. **מצאו את משוואת הישר העובר בנקודה $(\boldsymbol{0, 0})$ וגם בנקודה $(\boldsymbol{3, 3})$.** { תשובה: $y = x$ }
4. **מצאו את משוואת הישר העובר בנקודה $(\boldsymbol{1, 8})$ וגם בנקודה $(\boldsymbol{3, -6})$.** { תשובה: $y = -7x + 15$ }

**עד כאן פונקציית הקו הישר**

# קו התקציב

קו תקציב הוא קו ישר שמשוואתו נראית כך:

$$\boxed{p_1x + p_2y = I}$$

$p_1$ - מחיר מוצר ה-$x$.

$p_2$ - מחיר מוצר ה-$y$.

$x, y$- הכמות שהצרכן רכש מהמוצר $x, y$ בהתאמה.

$I$- התקציב / ההכנסה.

במשוואה זו מתקיים שוויון מלא בין הכנסת הצרכן להוצאותיו על המוצרים.

נסביר כמה דגשים בהקשר של תקציב הצרכן למתמטיקה בפועל:

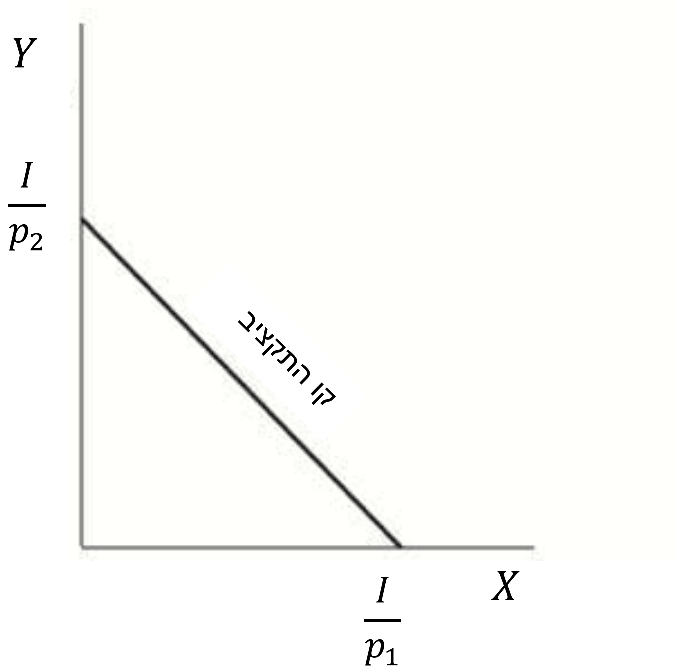
1. נקודות החיתוך של הישר עם הצירים (עם ציר X וציר Y) מציינות את הכמות המקסימלית שיכול לרכוש הצרכן מכל מוצר. (במידה ולא ירכוש כלום מהמוצר השני)
ובשפה מתמטית: ע"מ למצוא את נקודת החיתוך של הישר עם ציר איקס (לדוגמא), נציב במשוואת הישר (התקציב) $y = 0$. ונקבל:

$$p_1x + p_2 0 = I$$
$$p_1x = I$$
$$x = \frac{I}{P_1}$$

כלומר, כמות המוצרים שניתן לקנות ממוצר, הוא ההכנסה I מחולקת במחיר המוצר. בדוגמא שהצגנו, y=0 כלומר הצרכן רצה לרכוש 0 יחידות מ$Y$ ולכן הוא יכול לצרוך מכל ההכנסה רק יחידות $X$.

לכן, קו התקציב חותך את ציר הX בנקודה $(\frac{I}{P_1}, 0)$ ואת ציר הY בנקודה $(0, \frac{I}{P_2})$

נראה שרטוט:




2. <u>שיפוע קו התקציב זהו היחס בין מחירי המוצרים</u>. כלומר היחס בין $p_1$ ו $p_2$.

נשמע הגיוני סה"כ.

בכל נקודה על קו התקציב, אנו משנים את הכמויות משני המוצרים באופן שסך ההוצאה נשאר קבוע.

ועכשיו בשפה מתמטית: כאשר נתונה משוואת הישר $\boldsymbol{y = ax + b}$

השיפוע הוא $\boldsymbol{a}$ המקדם של $\boldsymbol{x}$.

ניקח את משוואת קו התקציב, <u>**נסדר אותה בצורה המוכרת של משוואת קו הישר**</u> ונקבל את השיפוע:

$$\boldsymbol{p_1x + p_2y = I}$$

$$\boldsymbol{p_2y = -p_1x + I}$$

$$\boxed{\boldsymbol{y = \frac{-p_1}{p_2}x + \frac{I}{p_2}}}$$

למדנו כבר, כי השיפוע הוא המקדם של X .

יוצא מכאן, **שהשיפוע של קו התקציב הוא:** $\frac{-p_1}{p_2}$ .

(קו התקציב הוא משמאל לימין, אז ברור שהשיפוע הוא שלילי!)

**<u>מסקנה:</u>**

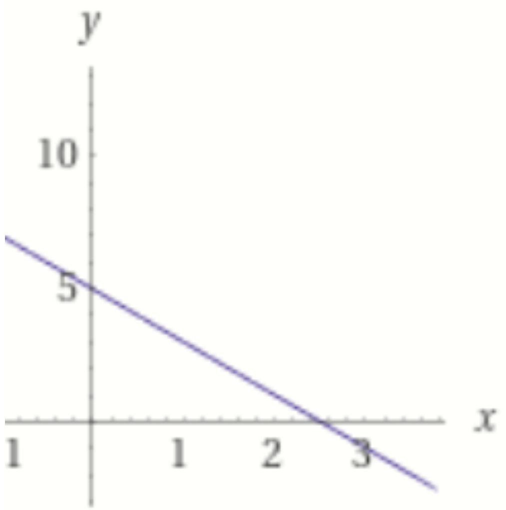
כאשר הצרכן מחליט להגדיל את Y ביחידה אחת, עליו להקטין את X ב $\frac{-p_1}{p_2}$ יחידות.

**<u>דוגמא:</u>**

נתון: $I = 100$ , $p_2 = 20$ , $p_1 = 40$

קו התקציב יהיה: $40x + 20y = 100$ או בצורה של משוואת ישר: $y = -2x + 5$

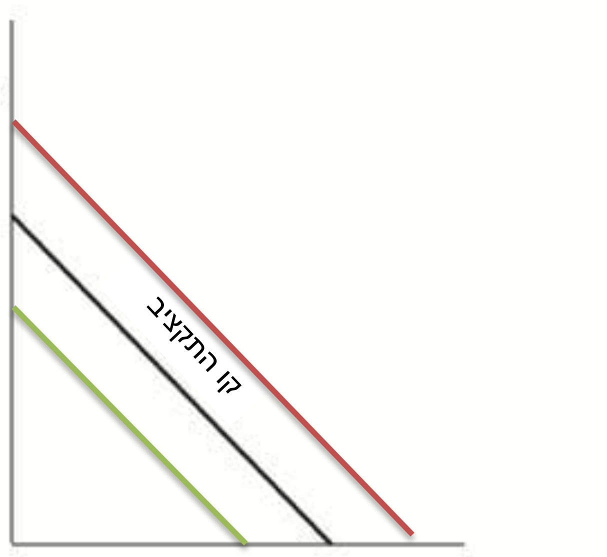
הצגתו הגרפית היא:



## **<u>תזוזות של הקו</u>**

<u>שינוי במחירי המוצרים או בהכנסה הנתונה של הצרכן ישנו את קו התקציב(!)</u>
נפרט על השינויים האפשריים:

- כאשר **הכנסתו (התקציב) של הצרכן** תגדל, קו התקציב <u>יזוז כלפי מעלה</u>. (מסומן באדום).
וכאשר הכנסתו תקטן, קו התקציב <u>יזוז כלפי מטה</u>. (מסומן בירוק).



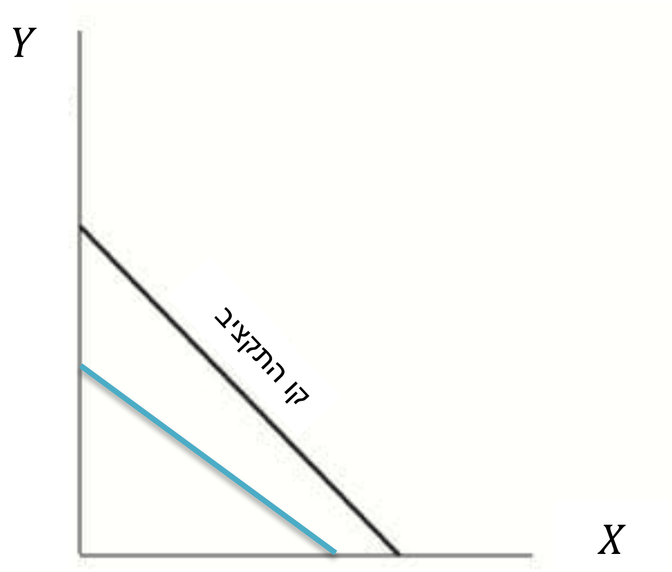

נדגיש, כי השיפוע אינו משתנה, **והוא אותו דבר בדיוק!!** שהרי למדנו שהשיפוע מושפע מהמחירים, והיות והם לא השתנו, אז גם השיפוע לא ישתנה(!).

(כלומר, השיפוע החדש מקביל לשיפוע הישן, וידוע כבר שלישרים מקבילים, אותו שיפוע).

- <u>כאשר מחירי המוצרים $p_1, p_2$ ישתנו</u>, ההשפעה על קו התקציב היא:

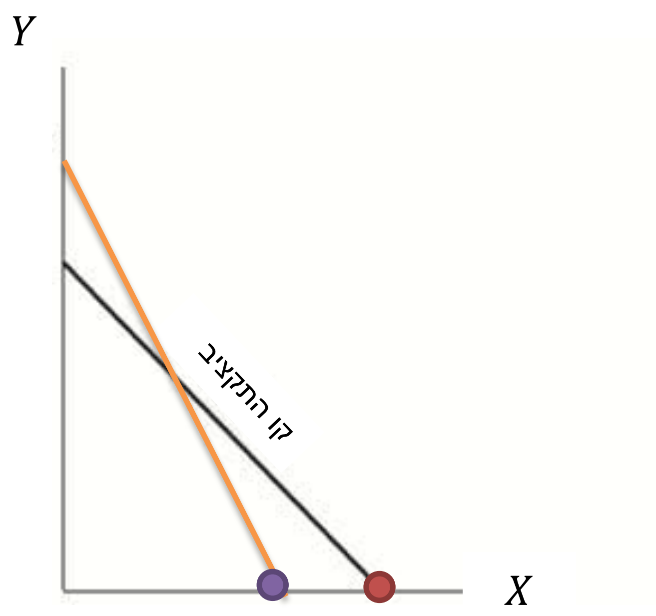
א. אם מחירי שני המוצרים עלו, מובן שנוכל לרכוש כמות קטנה יותר מכל מוצר.
לכן, קו התקציב החדש יהיה <u>מתחת לקו התקציב הקודם</u>.
מה עם השיפוע?
אם מחירי שני המוצרים עלו באותו היחס (לדוגמא: שניהם עלו פי 3 מהמחיר הקודם),
אז <u>השיפוע לא ישתנה</u> כי יחס המחירים לא השתנה, ונקבל קו תקציב מקביל לקו התקציב המקורי, אך מתחתיו (כמו הקו הירוק בשרטוט שלעיל).
וכן להיפך, אם מחיר שני המוצרים ירדו. (כמו הקו האדום בשרטוט שלעיל).

ב. אם מחיר המוצר $Y$ עלה יחסית יותר מX , קו התקציב יהיה <u>בעל שיפוע קטן יותר</u>. (מסומן בכחול).




ג. אם מחיר המוצר $X$ עלה יחסית יותר ממוצר Y , נקודת החיתוך של הישר עם ציר X תקטן ונקודת החיתוך של הישר עם ציר Y תגדל.

כלומר, נקבל קו חדש <u>שחותך את הקו הקודם</u> (מסומן בכתום).




**<u>עד כאן קו התקציב</u>**

# הפונקציה הריבועית

כל פונקציה מהצורה הבאה:

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c}$$

נקראת גם "פרבולה"
דוגמאות לגרף של הפונקציה:

הסבר על $a, b, c$ :

הפרמטרים $a, b, c$ הם אלה שאחראים על צורת הגרף.
כל פרמטר, לבד או יחד עם פרמטר אחר, אחראי על תכונה/מאפיין אחר.
נתחיל:

$\boldsymbol{a}$ – אחראי על צורת הפרבולה.

אם $a > 0$ אז הפרבולה – "מחייכת".

אם $a < 0$ אז הפרבולה – "בוכה".

$\boldsymbol{c}$ – הוא הגובה בו הגרף חותך את ציר $y$.
במילים אחרות, נקודת החיתוך עם ציר $y$ תהיה $(0, c)$.

מציאת הנקודה $c$:

**נציב $x = 0$ בפונקציה**. המספר שנקבל כתוצאה הוא הערך של $c$.

מציאת נקודות חיתוך עם ציר $x$:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

כאמור, נפתור את המשוואה הנתונה (כי גובה הגרף הוא 0).

נבדוק 3 מצבי פתרון:
נגדיר:

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

מצב ראשון – שני פתרונות למשוואה:
כאשר $\Delta > 0$: (נשתמש בנוסחת השורשים)

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

מצב שני – פתרון יחיד למשוואה:
כאשר $\Delta = 0$:

$$x = \frac{-b}{2a}$$

מצב שלישי – אין פתרון למשוואה:
כאשר $\Delta < 0$.

המצבים השונים שיכולים להתקיים:
לתת דוגמאות

**<u>קודקוד הפרבולה:</u>**

מהי נקודת הקודקוד? (הצגה גרפית):

נקודת הקודקוד של הפרבולה היא מהצורה: $(\boldsymbol{x_k}, \boldsymbol{y_k})$

כאשר:

$$\boldsymbol{x_k = -\frac{b}{2a}}$$

וידוע ש- $\boldsymbol{f(x_k) = y_k}$

מה ידוע על $\boldsymbol{y_k}$ ?

- $\boldsymbol{y_k}$ הוא הערך המקסימלי כאשר $a < 0$.
- $\boldsymbol{y_k}$ הוא הערך המינימלי כאשר $a > 0$.

תרגיל:

**<u>סימטריה:</u>**

"ציר הסימטריה" של הפרבולה היא הישר $\boldsymbol{x = x_k}$ .

נבחן כעת את שתי נקודות הבאות: $(x_1, y_0), (x_2, y_0)$
נשים לב (!) כי לשתיהן יש את **אותה הגובה.**
אז נסיק כי:

$$\boxed{\boldsymbol{x_k = \frac{x_1 + x_2}{2}}}$$

במילים אחרות, אם לפנינו 3 נקודות שונות,
מספיק לדעת רק שני שיעורים של $x$ ואז לפי החישוב מעלה, נדע גם את השלישי.

תרגילים:

**<u>עד כאן משוואה ריבועית</u>**

# פונקציה לוגריתמית

פונקציה מהצורה:

$$\boxed{\boldsymbol{f(x) = \log_a x}}$$

$a$ – מספר **חיובי** שונה מ-1 (חייב להיות חיובי!). $a > 0, a \neq 1$

$a$ - נקרא בסיס הלוגריתם.

הפונקציה הזו מתאימה למספר חיובי $x$ את המספר שפותר את המשוואה $a^y = x$

תחום ההגדרה של הפונקציה:

הפונקציה יודעת לקבל אליה – כל איקס חיובי. $x > 0$

דוגמא:

$$\log_2 16 = ?$$

שואלים: "הבסיס (2) בחזקת איזה מספר, ייתן לנו את התשובה 16?

התשובה: 4.

למה? כי $2^4 = 16$

דרך הפתרון:

נבנה את המשוואה הבאה:

$$2^x = 16$$

$$2^x = 2^4$$

$$\boldsymbol{x = 4}$$

דוגמא נוספת:

$$\log_2 \frac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = \boldsymbol{-3}$$

## חוקי לוגריתמים

$$\log_a x + \log_a y = \log_a(x \cdot y)$$

$$log_a x - log_a y = log_a(\frac{x}{y})$$

$$log_a x^b = b \cdot log_a x$$

$$a^{log_a x} = x$$

$$log_a x = \frac{log_b x}{log_b a}$$

$$log_a a = 1$$

$$log_a 1 = 0$$

המספר $e$ הוא בקירוב 2.718. מקובל לסמן $log_e x = lnx$

**<u>עד כאן על הפונקציה הלוגריתמית</u>**

# פונקציה מעריכית

<u>פונקציה מהצורה</u> :

$$\boxed{f(x) = a^x}$$

<u>זיהוי ויזואלי</u> :

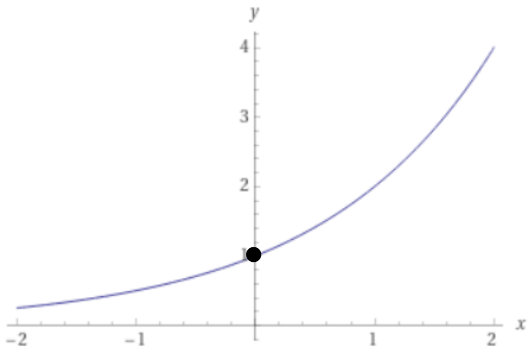
$$\boxed{\text{מספר}^{\text{משתנה}}}$$

$a$ – מספר **חיובי** כלשהו (חייב להיות חיובי!)

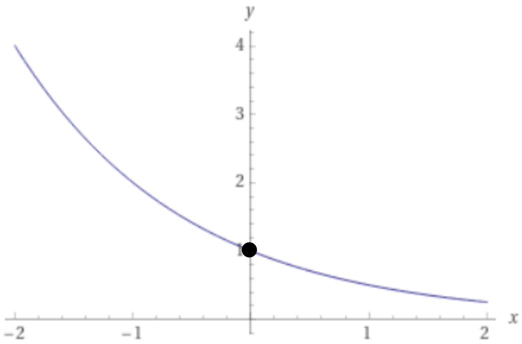
<u>תחום ההגדרה של הפונקציה</u> :

הפונקציה יודעת לקבל אליה – כל איקס שבעולם (!)

<u>גרף הפונקציה</u> :



**גרף עולה - כאשר $a > 1$**

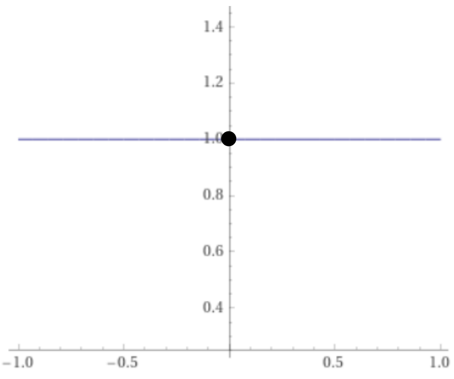


**גרף יורד - כאשר $0 < a < 1$**

<u>הערה</u> : הפונקציה תמיד חיובית. כלומר $f(x) > 0$ לכל איקס.

<u>הערה נוספת</u> : $f(0) = a^0 = 1$

<u>הערה נוספת</u> : אם $a = 1$ נקבל את הפונקציה הקבועה $y = 1$ שנראית כך :



**פונקציה קבועה - כאשר $a = 1$**

<u>הצורה המורחבת של הפונקציה המעריכית</u> :

<u>פונקציה מהצורה</u> :

$$\boxed{\boldsymbol{f(x) = k \cdot a^{x}}}$$

<u>זיהוי ויזואלי</u> :

$$\boxed{\text{מספר} \cdot (\text{מספר})^{\text{משתנה}}}$$

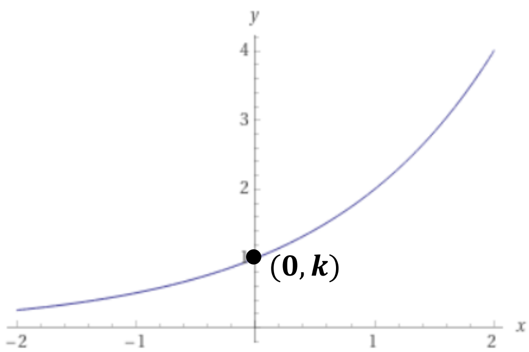
$a$ – מספר **חיובי** כלשהו (חייב להיות חיובי!)

$k$ – מספר **חיובי** כלשהו (חייב להיות חיובי!)

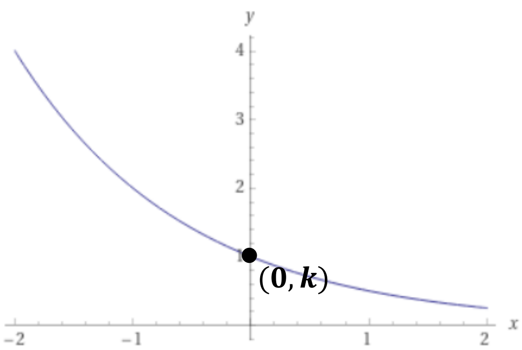
<u>תחום ההגדרה של הפונקציה</u> :

הפונקציה יודעת לקבל אליה – כל איקס שבעולם (!)

<u>גרף הפונקציה</u> :




**גרף עולה - כאשר $a > 1$**

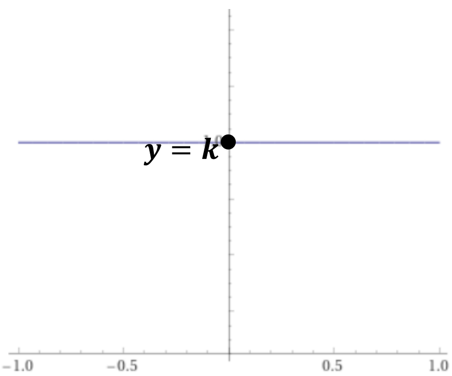



**גרף יורד - כאשר $0 < a < 1$**

<u>הערה</u> : הפונקציה תמיד חיובית. כלומר $f(x) > 0$ לכל איקס.

<u>הערה נוספת</u> : $f(0) = k \cdot a^{0} = k$

<u>הערה</u> : אם $a = 1$ נקבל את הפונקציה הקבועה $y = k$ שנראית כך :




**פונקציה קבועה - כאשר $a = 1$**

## משוואות מעריכות - תרגילים

18

1. $2^x = 64$
2. $5^x = 25$
3. $4^x = 32$
4. $81^x = 27$
5. $5^x = 125$
6. $64^x = 1$
7. $100^x = 10000$
8. $3^{x+4} = 27$
9. $32^{4-x} = 16^{x-4}$
10. $1000^{x-5} = 10000^{2x+5}$
11. $3^x = \frac{1}{9}$
12. $4^x = \frac{1}{32}$
13. $144^{x+2} = \frac{1}{12^4}$
14. $(\frac{1}{4})^{2x} = 64$
15. $(\frac{4}{9})^x = \frac{8}{27}$
16. $(\frac{27}{125})^{9-x} = (\frac{5}{3})^{-1}$
17. $5 \cdot 27^x = 45$
18. $2^x \cdot 8^{x+2} = 4$
19. $5^x \cdot 25^{x+5} = 125$
20. $5 \cdot 5^x \cdot 5^x = 125$

**משוואות מעריכות - פתרונות**

1. $2^x = 64 \to 2^x = 2^6 \to x = 6$
2. $5^x = 25 \to 5^x = 5^2 \to x = 2$
3. $4^x = 32 \to 2^{2x} = 2^5 \to 2x = 5 \to x = 2.5$
4. $81^x = 27 \to 3^{4x} = 3^3 \to 4x = 3 \to x = \frac{3}{4}$
5. $5^x = 125 \to 5^x = 5^3 \to x = 3$
6. $64^x = 1 \to x = 0$
7. $100^x = 10000 \to 100^x = 100^2 \to x = 2$
8. $3^{x+4} = 27 \to 3^{x+4} = 3^3 \to x + 4 = 3 \to x = -1$
9. $32^{4-x} = 16^{x-4} \to 2^{5(4-x)} = 2^{4(x-4)} \to 20 - 5x = 4x - 16 \to 9x = 36 \to x = 4$
10. $1000^{x-5} = 10000^{2x+5} \to 10^{3(x-5)} = 10^{4(2x+5)} \to 3x - 15 = 8x + 20 \to 5x = -35 \to x = -7$
11. $3^x = \frac{1}{9} \to 3^x = \frac{1}{3^2} \to 3^x = 3^{-2} \to x = -2$
12. $4^x = \frac{1}{32} \to 2^{2x} = \frac{1}{2^5} \to 2^{2x} = 2^{-5} \to 2x = -5 \to x = -2.5$
13. $144^{x+2} = \frac{1}{12^4} \to 12^{2(x+2)} = 12^{-4} \to 2x + 4 = -4 \to x = -4$
14. $(\frac{1}{4})^{2x} = 64 \to 4^{(-1)2x} = 4^3 \to -2x = 3 \to x = -1.5$
15. $(\frac{4}{9})^x = \frac{8}{27} \to \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \to 2x = 3 \to x = 1.5$
16. $(\frac{27}{125})^{9-x} = (\frac{5}{3})^{-1} \to \left(\frac{3^3}{5^3}\right)^{9-x} = \frac{3}{5} \to \left(\frac{3}{5}\right)^{3(9-x)} = \frac{3}{5} \to 27 - 3x = 1 \to x = \frac{26}{3}$
17. $5 \cdot 27^x = 45 \to 5 \cdot 3^{3x} = 5 \cdot 3^2 \to 3x = 2 \to x = \frac{2}{3}$
18. $2^x \cdot 8^{x+2} = 4 \to 2^x \cdot 2^{3(x+2)} = 2^2 \to x + 3x + 6 = 2 \to x = -1$
19. $5^x \cdot 25^{x+5} = 125 \to 5^x \cdot 5^{2(x+5)} = 5^3 \to x + 2x + 10 = 3 \to x = -\frac{7}{3}$
20. $5 \cdot 5^x \cdot 5^x = 125 \to 5 \cdot 5^x \cdot 5^x = 5^3 \to 1 + x + x = 3 \to x = 1$

**עד כאן פונקציה מעריכית**

# אחוזים (ללא לוגים) – גידול דעיכה



פונקציית הגידול או הדעיכה נראית כך :

$$f(t) = A \cdot (1 \pm \frac{x}{100})^t$$

הסבר על רכיבי הפונקציה :

$A$ – הסכום/הערך ההתחלתי.

$x$ – אחוז הגדילה/הדעיכה פר יחידת זמן.

$t$ – מספר יחידות הזמן (שנים/חודשים/ימים/שעות) שעברו.

המשמעות :
הפונקציה $f$ מקבלת אליה משתנה $t$ ומוציאה את הערך המתקבל בתום התקופה המדוברת.

דוגמא :

הכנסנו לקופת חיסכון סכום של $A$ שקלים.
נאמר לנו על ידי פקיד הבנק שהקופה צוברת 4% תשואה בשנה אחת.
אנחנו רוצים לדעת מה הסכום שיצטבר בקופה **לאחר שנה אחת**. (כמה כסף יהיה לנו?)
נציב נתונים :

$$f(t) = A \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right)^1 = 1.04A$$

וכמה אחרי שנתיים?

$$f(t) = A \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right) = 1.0816A$$

ואחרי 3 שנים?

$$f(t) = A \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right) = 1.124A$$

עכשיו בכתיבה מקוצרת :

$$f(t) = A \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right)^3 = 1.124A$$

ניתן דוגמא מספרית מלאה:

הכנסנו לקופת חיסכון סכום של $A = 200$ שקלים.
נאמר לנו על ידי פקיד הבנק שהקופה צוברת 5% תשואה בשנה אחת.
אנחנו רוצים לדעת מה הסכום שיצטבר בקופה לאחר 6 שנים. (כמה כסף יהיה לנו?)
נציב נתונים:

$$f(t) = 200 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^6 = 268.019$$

שימו לב:
כאשר מדובר ב"גידול" – נשתמש בסימן ה +.
כאשר מדובר ב"דעיכה" (קיטון) – נשתמש בסימן ה -.

## שיטה לפתרון תרגילים בנושא

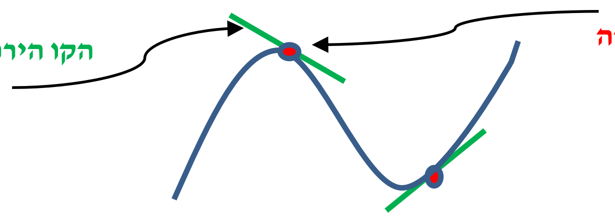
שלב ראשון: זיהוי הנתונים. מהם מרכיבי הנוסחא שנתונים לנו.
שלב שני: על איזה מרכיב שאלו אותנו?
שלב שלישי: הצבת הנתונים במקומות המתאימים.
שלב רביעי: בידוד הנעלם עליו שאלו ומציאתו.

## עד כאן פונקצית גידול ודעיכה

## **נושא - נגזרת**

**הקדמה:**

**מה היא פונקציית הנגזרת?** נגזרת היא פונקציה חדשה אשר נובעת מהפונקציה המקורית שלנו ע"י ביצוע פעולת הגזירה.
השם "נגזרת" בא לציין בדיוק את זה - שהיא "נגזרת" מהפונקציה המקורית.
הנגזרת היא מאין תעודת זהות של הפונקציה המקורית ובעזרתה נוכל ללמוד הרבה על התנהגות פונקציית המקור.
אחד השימושים המרכזיים בנגזרת הוא מציאת השיפוע של המשיק לגרף הפונקציה כפי שרואים באיור הבא:




- **משיק -** ישר העובר דרך נקודה כלשהי על הפונקציה והכיוון שלו יהיה זהה לכיוון הפונקציה באותה הנקודה.
המשיק הוא קו ישר ה"נושק" לפונקציה בנקודה. מכיוון שהמשיק הוא קו ישר אז יש לו שיפוע מוגדר.
באמצעות הנגזרת ניתן לחשב את השיפוע של המשיק לפונקציה בכל נקודה על הפונקציה המקורית.

- **נקודת השקה -** נקודה על הפונקציה בה עובר המשיק והיא משותפת לפונקציה וגם למשיק.

- **סימון:** אם את הפונקציה המקורית מסמנים ב- $f(x)$ אז את הנגזרת של הפונקציה מסמנים עם ׳- $f'(x)$.

**ישנם כמה סוגים של נגזרות:**

1. נגזרת של מספר
2. נגזרת של קו ישר
3. נגזרת המשלבת $x$ ומספר
4. נגזרת של פולינום
5. נגזרת של מכפלת פונקציות
6. נגזרת של מנת פונקציות
7. נגזרת מורכבת
8. נגזרת עם פרמטר
9. נגזרת פונקציית שורש
10. נגזרת פונקציה מעריכית
11. נגזרת פונקציה לוגריתמית

## נדגים כל נגזרת:

1. **נגזרת של מספר -** נגזרת של מספר היא 0.

**דוגמא:** $f(x) = 3$ אז הנגזרת $f\,'(x) = 0$

---

2. **נגזרת של קו ישר -** נגזרת של קו ישר היא המספר שנמצא לפני ה- $x$.

**דוגמא:** $f(x) = -4x$ אז הנגזרת $f'(x) = -4$

---

3. **נגזרת המשלבת $x$ ומספר -** אם בפונקציה יש שילוב של $x$ ומספר, נגזור כל אחד מהם **בנפרד**.

**דוגמא:** נתון הישר $f(x) = 3x + 2$ נגזור כל חלק בנפרד - הנגזרת של $3x$ היא 3 והנגזרת של 2+ היא 0.

לכן הנגזרת כולה היא $f'(x) = 3 + 0 = 3$ כלומר $f'(x) = 3$

---

4. **נגזרת של פולינום -** כלל הבסיס בגזירת פונקציית פולינום אומר כך:

אם הפונקציה הנתונה היא $f(x) = x^n$ אז הנגזרת היא $f'(x) = nx^{n-1}$

**נראה דוגמאות:**

נתון הפולינום $f(x) = x^4$ אז הנגזרת שלו היא $f'(x) = 4x^3$.

נתון הפולינום $f(x) = x^6 + 5$ אז הנגזרת שלו היא $f'(x) = 6x^5 + 0$ כלומר $f'(x) = 6x^5$.

נתון הפולינום $f(x) = 5x^3$ אז הנגזרת שלו היא $f\,'(x) = 5 \cdot 3x^2 = 15x^2$.

---

5. **נגזרת של מכפלת פונקציות -** כאשר נתונה לנו פונקציה $A(x)$ שהיא מכפלה של שתי פונקציות.

$$\boldsymbol{A(x) = f(x) \cdot g(x)}$$

אז הנגזרת של מכפלת הפונקציות תראה כך:

$$\boldsymbol{A'(x) = f'(x) \cdot g\,(x) + g'(x) \cdot f(x)}$$

**דוגמא:** $A'(x) = [4x\,(x^3 + 1)]\,' = 4(x^3 + 1) + 3x^2 \cdot 4x$

---

6. **נגזרת של מנת פונקציות -** במידה ונתונות שתי פונקציות שהקשר ביניהן הוא קשר של חילוק

אז הנגזרת של מנת הפונקציה תראה כך $\boldsymbol{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{[g(x)]^2}}$

(נגזרת מנה שווה לנגזרת המונה ($f'(x)$) **כפול** פונקציית המכנה ($g(x)$) **פחות** נגזרת המכנה ($g'(x)$) **כפול** פונקציית המונה ($f(x)$) וכל זה **חלקי** פונקציית המכנה בריבוע ( $[g(x)]^2$ ).

**דוגמא:** $f(x) = \frac{4x+2}{x^3} = f'(x) = \frac{4 \cdot x^3 - 3x^2(4x+2)}{(x^3)^2}$

**7. נגזרת מורכבת -** פונקציה מורכבת היא פונקציה המכילה 2 פונקציות. גם הנגזרת שלה תכיל 2 פונקציות.

נגזור פונקציה מורכבת לפי הכלל הבא: $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ **(גוזרים מבחוץ פנימה)**

**דוגמא:** נתונה הפונקציה $f(x) = (3-4x)^5$ והנגזרת שלה היא $f'(x) = 5(3-4x)^4 \cdot (-4)$

---

**8. נגזרת עם פרמטר -** פרמטר הוא בעצם מספר ואנחנו מתייחסים אליו כמספר.

נתונה הפונקציה $f(x) = ax$ אז הנגזרת שלה היא $f'(x) = a$ .

**דוגמא:** נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3$ והנגזרת שלה $f'(x) = 3 \cdot ax^2$

---

**9. נגזרת פונקציית שורש -** יש 2 נוסחאות לגזירה של שורש: פונקציית שורש פשוטה ומורכבת.

פשוטה: $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ומורכבת: $\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x)$

**דוגמא לפונקציית שורש פשוטה:** נתונה הפונקציה $f(x) = 4\sqrt{x}$ והנגזרת שלה היא

$$f'(x) = 4 \cdot (\sqrt{x})' = 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{4}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

**דוגמא לפונקציית שורש מורכבת:** נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{4x}$ והנגזרת שלה היא

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4x}} \cdot 4 = \frac{4}{2\sqrt{4x}} = \frac{2}{\sqrt{4x}}$$

---

**10. נגזרת פונקציה מעריכית -** במקרה של $e^x$ הנגזרת של הפונקציה שווה לפונקציה עצמה $f'(x) = e^x$.

**דוגמא:** נתונה הפונקציה- $f(x) = e^x$ והנגזרת שלה היא $f'(x) = e^x$

**עוד דוגמא:** נתונה הפונקציה $f(x) = e^x + 3x - 4$ והנגזרת שלה היא $f'(x) = e^x + 3$

---

**11. נגזרת פונקציה לוגריתמית -** נגזרת של פונקציית $lnx$ **פשוטה** היא $\frac{1}{x}$ .

נגזרת של $ln(f(x))$ **מורכבת** היא $\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$.

**דוגמא:** נתונה הפונקציה $f(x) = 5lnx$ והנגזרת שלה $f'(x) = 5 \cdot \frac{1}{x} = \frac{5}{x}$

**עוד דוגמא:** נתונה הפונקציה $f(x) = ln(x^3)$ והנגזרת שלה $f'(x) = \frac{1}{x^3} \cdot 3x^2 = \frac{3}{x}$

**ועוד דוגמא:** נתונה הפונקציה $f(x) = ln(-4x^2 - 5)$

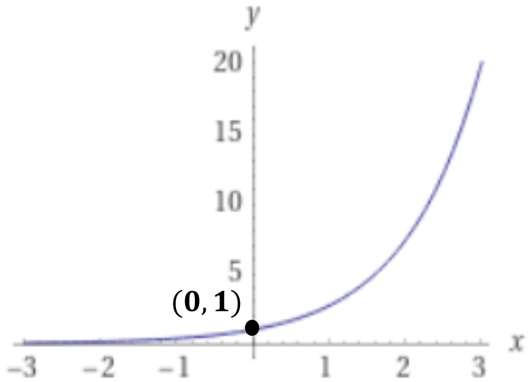
והנגזרת שלה היא: $f'(x) = \frac{1}{-4x^2-5} \cdot (-8x) = \frac{8x}{4x^2+5}$

## סיכום כללי הנגזרות

| כללים בסיסיים |
|---|
| נגזרת של קבוע: $C' = 0$ |
| נגזרת של משתנה: $x' = 1$ , $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{1}{(f(x))^2} \cdot f'(x)$ , $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ |
| נגזרת של מכפלת קבוע במשתנה: $(cx)' = c$ |
| נגזרת עם חיסור/חיבור בין פונקציות: $(f(x) \pm h(x))' = f'(x) \pm h'(x)$ |
| נגזרת עם כפל בין פונקציות: $(f(x) \cdot h(x))' = f'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot h'(x)$ |
| נגזרת של מנה בין פונקציות: $\left(\frac{f(x)}{h(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot h(x) - f(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$ |
| **נגזרת של פונקציה עם חזקות ושורשים** |
| נגזרת של חזקה: $(x^n)' = nx^{n-1}$ |
| נגזרת של פונקציית שורש פשוטה: $\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| נגזרת של פונקציית שורש מורכבת: $(\sqrt{f(x)})' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x)$ |
| נגזרת של מכפלת קבוע במשתנה עם חזקה: $((A(x))^n)' = n \cdot (A(x))^{n-1} \cdot A'(x)$ |
| **נגזרות של פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות** |
| נגזרת של $e^x$: $(e^x)' = e^x$ |
| נגזרת של $e^x$ עם פונקציה: $(e^{f(x)})' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$ |
| נגזרת של ln: $(lnx)' = \frac{1}{x}$ |
| נגזרת של ln עם פונקציה: $(\ln(f(x)))' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$ |

# פונקציה $e^x$

מקרה פרטי של הפונקציה $a^x$ כאשר $a = 2.718 = e$




**תחום הגדרה:**

כל איקס שתרצו. כל $x$.

**חיתוך עם ציר $y$:**

בגובה 1. בנקודה $(0,1)$.

**חיוביות:**

הפונקציה תמיד חיובית.
תמיד נותנת תוצאות גדולות יותר מ-0.

**גזירות ישירה + גזירות של הרכבה:**

$$(e^x)' = e^x$$

$$(e^{x^2+3x})' = e^{x^2+3x} \cdot (2x+3)$$

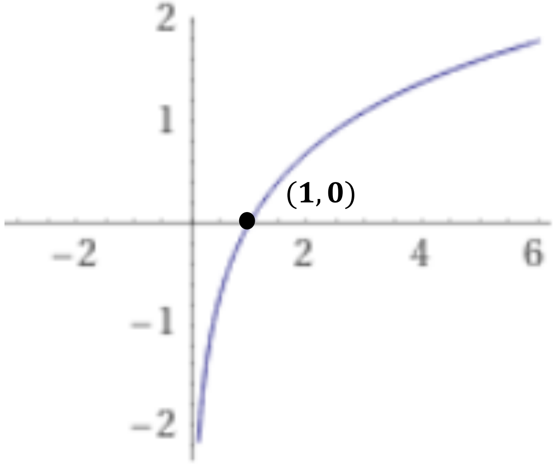
**מונוטוניות:**

הפונקציה מונוטונית עולה לכל $x$. תמיד תמיד עולה.

**אינטגרל:**

$$\int e^x\,dx = e^x + C \quad , \quad \int e^{2x}\,dx = \frac{e^{2x}}{2} + D$$

# פונקציה $lnx$




מקרה פרטי של הפונקציה $log_a(x)$ כאשר $a = 2.718 = e$ , $log_e(x) = lnx$

**<u>תחום הגדרה:</u>**
איקסים חיוביים. כל $x > 0$.

**<u>חיתוך עם ציר $x$:</u>**
בנקודה $(1,0)$.

**<u>חיתוך עם ציר $y$:</u>**
אין.

**<u>גזירות ישירה/גזירה של הרכבה:</u>** לא שוכחים להכפיל בנגזרת פנימית.

$$(lnx)' = \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{x}$$

$$(\ln(x^2 + 3x))' = \frac{1}{x^2 + 3x} \cdot (2x + 3)$$

**<u>מונוטוניות (לאט):</u>**
הפונקציה מונוטונית עולה לכל $x > 0$. תמיד תמיד עולה. אבל היא עולה לאט...

# חקירת פונקציה

**מבוא:**

בתרגילים מסוג זה נקבל פונקציה ונתבקש "לחקור" אותה. בסוף תהליך החקר נשרטט גרף מדויק של פונקציה זו.

**איך נבצע?**

על ידי חקר התכונות השונות של הפונקציה.

נעביר את הפונקציה סדרת בדיקות כאשר כל בדיקה תוסיף לנו פרטים עליה. לבסוף נרכיב אותם יחד ונצייר גרף.

**התהליך סדור. ברור. וידוע מראש.**

עובדים לפי הסעיפים שבעמודים הבאים: (במידה וביקשו. לא תמיד נצטרך את כולם...)

## <u>מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה:</u>

<u>הסבר</u>: נגדיר לעצמנו מהם חוקי המשחק. מהם האיקסים (חומרי הגלם) אותם הפונקציה יכולה לקבל ומהם אותם איקסים שאותם הפונקציה אינה יכולה לקבל.

**<u>בקורס שלנו ישנם 3 פרמטרים:</u>**

### 1. <u>מכנה חייב להיות שונה מ-0.</u>

אם יש מכנה בפונקציה, ניקח **<u>את כולו כיחידה אחת</u>** ונכתוב "שונה מ-0" כך:

$$f(x) = \frac{2}{x-3} \rightarrow x-3 \neq 0 \rightarrow x \neq 3$$

<u>מסקנה</u>: המשתנה $x$ יכול להיות כל מספר חוץ מ-3.

### 2. <u>ביטוי בתוך שורש חייב להיות חיובי או אפס.</u>

אם יש $\sqrt{\ }$ בפונקציה נדרוש **שכל הביטוי שבתוכו, כיחידה אחת**, יהיה <u>גדול או שווה</u> ל-0:

$$f(x) = \sqrt{x-3} \rightarrow x-3 \geq 0 \rightarrow x \geq 3$$

<u>מסקנה</u>: המשתנה $x$ יכול להיות כל מספר שגדול או שווה ל-3.

### 3. <u>ביטוי בתוך לוג חייב להיות חיובי. (לוג בבסיס כלשהו)</u>

אם יש לוג בפונקציה, נדרוש שהביטוי שמוכנס אליו, **כולו, כיחידה אחת**, יהיה <u>חיובי</u>:

$$f(x) = log(x-3) \rightarrow x-3 > 0 \rightarrow x > 3$$

**<u>הערה חשובה</u>**: תחום ההגדרה שקיבלנו תקף לכל אורך התרגיל. (בכל הסעיפים! וכמובן גם בגרף)

## <u>מציאת נקודות החיתוך עם הצירים:</u>

1. חיתוך עם ציר $x$: נשווה את הפונקציה ל-0. <- $\boldsymbol{f(x) = 0}$ **ופותרים...מקבלים** $\boldsymbol{x_1, x_2 \dots x_k}$
   ואז הנקודות הן $(x_1, 0), (x_2, 0) \dots (x_k, 0)$
2. חיתוך עם ציר $y$: נציב במקום $x$ את המספר 0. <- $\boldsymbol{f(0) = \cdots}$ **מקבלים תוצאה שהיא גובה החיתוך**
   ואז הנקודה היא $(0, y_1)$

## **<u>מציאת נקודות חשודות כקיצון וסיווג</u>**

1. גוזרים את הפונקציה הנתונה על פי חוקי הנגזרות, משווים את הנגזרת שקיבלנו ל-0 ופותרים את המשוואה. מקבלים את שיעורי ה-$x$ של הנקודות החשודות כקיצון.

$$f'(x)=0 \text{ פותרים... ומקבלים חשודות } x_1,x_2\dots x_k$$

2. מפעילים את **<u>מבחן הנגזרת השנייה</u>**, כלומר **<u>גוזרים שוב את הפונקציה</u>** ומציבים את הנקודות החשודות שקיבלנו בסעיף 1.

**אם** $f''(x_1)>0$ **אז הנקודה החשודה היא נקודת <u>מינימום</u>.**

**אם** $f''(x_1)<0$ **אז הנקודה החשודה היא נקודת <u>מקסימום</u>.**

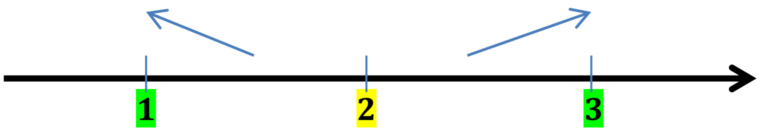
**אם** $f''(x_1)=0$ **אז הנקודה תהיה חשודה כנקודת <u>פיתול</u>. (נדיר בקורס)**

3. נציב את שיעורי נקודות הקיצון שמצאנו **<u>בפונקציה המקורית הנתונה בתרגיל</u>** על מנת למצוא את שיעורי ה-$y$ שלהן. לדוגמא $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ וכו' .

## **<u>מציאת תחומי עלייה וירידה</u>**

נציג על ציר איקס את נקודות הקיצון (בצהוב) ונבחר איקסים (שמותר להציב מבחינת תחום הגדרה) אשר נמצאים משמאל ומימין לנקודות אלה. נציב אותם **<u>בנגזרת</u>**.

**אם קיבלנו תוצאה <u>חיובית</u> – המגמה באותו תחום היא <u>מגמת עלייה</u>.**
**אם קיבלנו תוצאה <u>שלילית</u> – המגמה באותו תחום היא <u>מגמת ירידה</u>.**




## **<u>מציאת תחומי קעירות וקמירות</u>**

נבדוק אם הנגזרת השנייה גדולה או קטנה מ-0 :

**בתחומי ה-$x$ שבהם** $f''(x)>0$ **הפונקציה <u>קמורה</u> כלומר בצורה כזו** '$\cup$'

**בתחומי ה-$x$ שבהם** $f''(x)<0$ **הפונקציה <u>קעורה</u> כלומר בצורה כזו** '$\cap$'

## **<u>מציאת נקודות פיתול – ניקח שוב את הנגזרת השנייה:</u>**

כל הנקודות שמאפסות את הנגזרת השנייה חשודות כפיתול כלומר :

**אם** $f''(x_5)=0$ **אז** $x_5$ **חשודה כפיתול (נדיר בקורס)**

במקרה ומצאנו נקודות כאלה – נבדוק נציגים מימין ומשמאל לנקודה. (כמו במציאת תחומי עלייה וירידה אבל הפעם נציב בנגזרת השנייה(!) ). במידה ויש החלפת סימן מקעירות לקמירות או מקמירות לקעירות, נגיד שזו <u>נקודת פיתול</u>.

## **<u>שרטוט גרף</u>**

נשרטט מערכת צירים <u>גדולה וברורה עם שנתות</u>, נציג בה את כל הממצאים שאספנו ונשרטט גרף מלא.

# בעיות כלכליות

**מבוא לנושא:**

בנושא זה יוצג לנו סיפור המתאר הכנסות והוצאות של גוף כלכלי.
לרוב, ניעזר בהגדרת פונקציית הרווח (הוצאות - הכנסות) ובהמשך נמצא את הכמות שבה הרווח לגוף הכלכלי יהיה מקסימלי. לעיתים נמצא גם את הרווח המקסימלי עצמו.

דוגמאות – בהמשך...

---

**הכנסות - סימונים:**

$Q$ – כמות היחידות. (מספר אי שלילי. כלומר 0 או חיובי)

$P$ – מחיר. בדר"כ זה מחיר של יחידה אחת. (מספר חיובי גדול מ-0)

$TR(Q)$ – פונקציית הפדיון. (סך כל ההכנסות) <= $\boxed{TR(Q) = P \cdot Q}$ (Total Revenue)

---

**הוצאות - סימונים:**

$TC(Q)$ – פונקציית העלות הכוללת. (סך כל ההוצאות) (Total Cost)

---

**פונקציות - סימונים:**

$\pi(Q)$ – פונקציית הרווח.
פונקציה זו היא סך כל ההכנסות פחות סך כל ההכנסות <= $\boxed{\pi(Q) = TR(Q) - TC(Q)}$

$M\pi(Q)$ – פונקציית הרווח השולי. <= $\boxed{M\pi(Q) = \pi'(Q)}$ (הנגזרת של פונקציית הרווח)

# קמירות וקעירות – היבט כלכלי

מופיע כסעיף בתוך שאלה פתוחה – כמעט בכל מבחן.

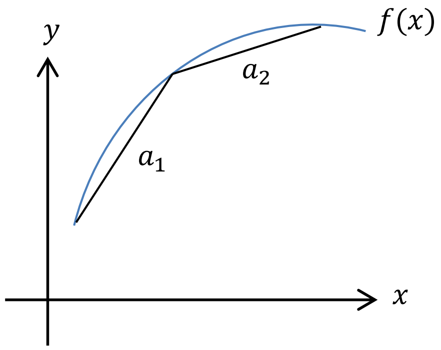
נדבר על:

1. אפיון תכונות של מיתרים עוקבים ומיקומם ביחס לפונקציה.
2. דרך פתרון תרגילים בנושא.

נסתכל על פונקציה **קעורה** ועל מיקומי המיתרים שנעביר בה:

1. המיתרים נמצאים **מתחת** לפונקציה.
2. ככל שנתקדם ימינה שיפוע המיתרים **הולך וקטן**.
3. נכתוב $a_2 < a_1$.

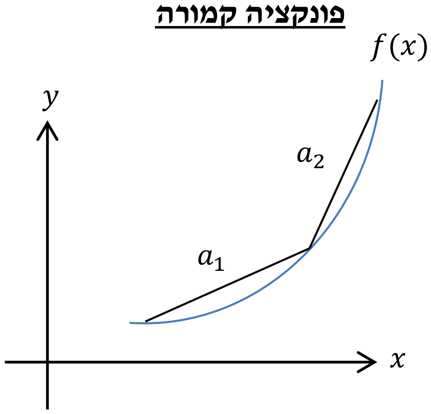
**פונקציה קעורה**




נסתכל על פונקציה **קמורה** ועל מיקומי המיתרים שנעביר בה:

1. המיתרים נמצאים **מעל** לפונקציה.
2. ככל שנתקדם ימינה שיפוע המיתרים **הולך וגדל**.
3. נכתוב $a_2 > a_1$.

**פונקציה קמורה**




## דרך פתרון:

1. הנתונים יהיו:
   א. הפונקציה קעורה/קמורה.
   ב. יינתנו 3 נקודות, **על גרף הפונקציה**, עם פרמטרים, לרוב אחת מהן תהיה ראשית הצירים $(0,0)$.
2. נחשב את השיפוע $a_1$ על פי 2 נקודות מתאימות. ע"י הנוסחא: $a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
3. נחשב את השיפוע $a_2$ על פי 2 נקודות מתאימות. ע"י הנוסחא: $a_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
4. נבנה אי שוויון מתאים:
   א. בפונקציה קעורה <- $a_2 < a_1$
   ב. בפונקציה קמורה <- $a_2 > a_1$
5. נציג את אי השוויון בהתאם לאי השוויון המבוקש. (לרוב חזי מבקש פשוט להוכיח קיום של אי שוויון)

# **<u>פונקציה בשני משתנים</u>**

<u>הקדמה:</u>

פונקציה $f(x,y)$ מקבלת אליה סל של שני מוצרים שנקראים $x$ ו- $y$, ומתאימה להם ערך $f(x,y)$.

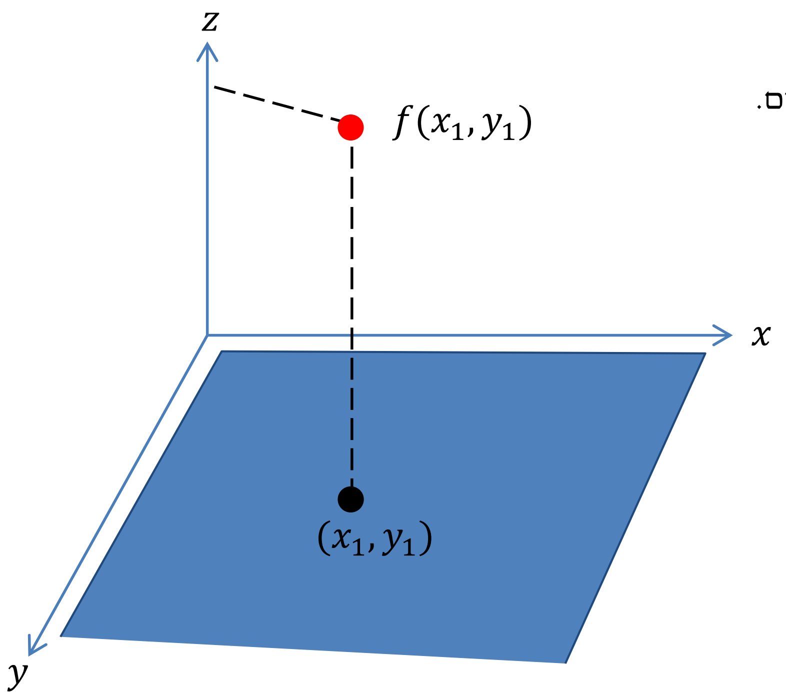
שימו לב – זוהי פונקציה שמתארת גרף "תלת מימדי" כלומר פונקציה במרחב.

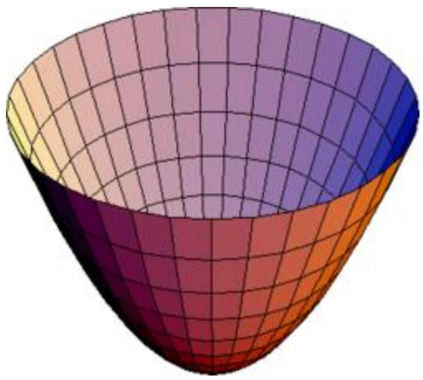
במילים אחרות – הפונקציה מקבלת אליה נקודה על "הרצפה" ומוציאה את הגובה שמעליה על הגרף.

נראה איך זה נראה:

אנחנו בוחרים נקודה על המישור הצבוע בכחול

ומקבלים כתוצאה את הגובה $z$ המסומן באדום.



**פונקציה של שני משתנים - להמחשה**

**<u>נראה דוגמה:</u>**

נתונה פונקצית התועלת $f(x,y) = 3x + y$

נציב את סל המוצרים $(2,1)$ ונקבל $f(2,1) = 3 \cdot 2 + 1 = 7$.

הגובה שמתקבל מעל הנקודה $(2,1)$ הינו 7, כלומר התועלת היא 7.

אם הצבנו בפונקציה סל א' וסל ב' – וקיבלנו כתוצאה את <u>אותה התועלת</u> – נגיד כי <u>הצרכן "אדיש" בין הסלים</u>.
הצרכן חותר לתעלת מרבית ומכיוון שבשני הסלים הוא מקבל אותה תועלת, לא משנה לו איזה סל ייבחר.
כאמור, הצרכן אדיש בין הסלים א' וב'.

## פונקציה מוטלאת בעלת שני משתנים

נתונה פונקציית התועלת $f$ הבאה:

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y, & y<x \\ 2x+3y, & y\geq x \end{cases}$$

מה התועלת המתקבלת בעבור הסלים הבאים?

סל $(1,2)$ -> $2\cdot 1+3\cdot 2=8$

סל $(3,1)$ -> $3+1=4$

סל $(0,0)$ -> $2\cdot 0+3\cdot 0=0$

# עקומות שוות ערך

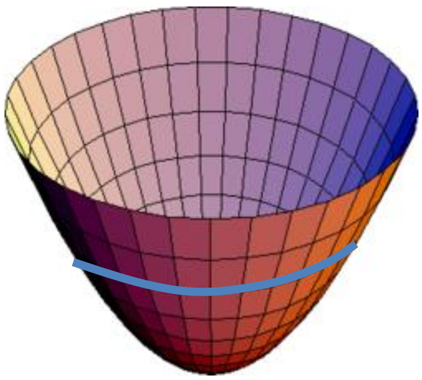
הקדמה:

למדנו שפונקציה $f(x,y)$ היא פונקציה שהגרף שלה הוא תלת מימדי, כפי שרואים באיור מטה, ולכן יהיה לנו קשה לשרטט גרפים של פונקציות שכאלה.

לשם כך נלמד את המושג **עקומה שווה ערך**.

**"עקומה שווה ערך"** – "אוסף כל הסלים/הנקודות שמביאים לפונקציה את אותה התועלת".

דוגמא:



**פונקציה של שני משתנים – להמחשה**

**בכחול – קו גובה**

נתונה הפונקציה $f(x,y) = y - x$.

מהם כל הסלים שאם נציב אותם בפונקציה נקבל את התועלת 5?

ננחש את $(2,7)$ וגם את $(3,8)$. האם יש עוד? איך נדע?

ניקח את הפונקציה ונשווה אותה ל-5: $y + x = 5$

נעביר אגפים ונקבל: $y = -x + 5$

**זהו קו ישר!** אנחנו מכירים אותו... ויודעים איך לצייר אותו במערכת צירים.

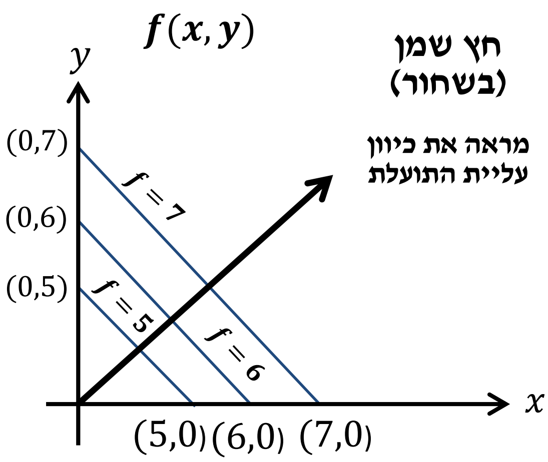
**מסקנה חשובה: עקומת שווה הערך בעלת אינדקס 5 היא הקו הישר שמשוואתו $y = -x + 5$**

נבדוק **אינדקסים** נוספים:

עבור אינדקס 6 נקבל: $y = -x + 6$

עבור אינדקס 7 נקבל: $y = -x + 7$

וכך הלאה... נצייר מה שקיבלנו. שיפוע כל הישרים הוא $-1$.




ציירנו "מפת עקומות שוות ערך" = מפת עש"ע.

המפה כוללת תמיד:

1. מערכת צירים עם סימון שמות הצירים.
2. 3 עקומות שוות ערך (לפחות) ועליהן ציון האינדקס שלהן. $f = I$.
3. "חץ שמן" לפי כיוון עליית התועלת.
4. נקודות החיתוך עם הצירים.

# פונקציית מינימום ופונקציית מקסימום

## פונקציית מינימום

**פונקציית המינימום מתאימה לסל $(x,y)$ את הערך הקטן מבין $x$ ו- $y$ .**

דוגמא:

נתונה הפונקציה $f(x,y)=\min\{x,y\}$.

מה הפונקציה תוציא בעבור הסלים הבאים:

**עבור הסל $(1,2)$ <- $f(1,2)=\min\{1,2\}=1$**

**עבור הסל $(5,3)$ <- $f(5,3)=\min\{5,3\}=3$**

**עבור הסל $(2,2)$ <- $f(2,2)=\min\{2,2\}=2$**

נכתוב את הפונקציה כהטלאה:

$$f(x,y)=\min\{x,y\}=\begin{cases} y, & y<x \\ x, & y\ge x \end{cases}$$

נצייר מפת עש"ע של פונקציית המינימום:

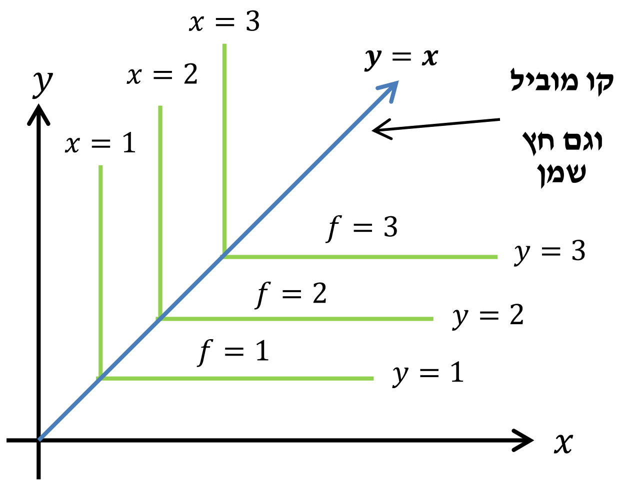
עבור אינדקס $I=1$:

$$f(x,y)=\min\{x,y\}=1 \Rightarrow \begin{cases} y=1, & y<x \\ x=1, & y\ge x \end{cases}$$

מתוך תחום ההגדרה של הפונקציה $f$ אנו מבינים כי הקו המחלק אותה לשני תחומים הוא הישר $y=x$ .

קו זה הוא קו חשוב מאוד לענייננו והוא ייקרא **הקו המוביל**.

אם כך – נצייר, ברביע הראשון, את העקומה שהתקבלה:



<u>פונקציית מקסימום</u>

**פונקציית המקסימום מתאימה לסל $(x,y)$ את הערך הגדול מבין $x$ ו- $y$ .**

דוגמא :

נתונה הפונקציה $\boldsymbol{f(x,y)=\max\{x,y\}}$.

מה הפונקציה תוציא בעבור הסלים הבאים :

**עבור הסל $(1,2)$ <- $\boldsymbol{f(1,2)=\max\{1,2\}=2}$**

**עבור הסל $(5,3)$ <- $\boldsymbol{f(5,3)=\max\{5,3\}=5}$**

**עבור הסל $(2,2)$ <- $\boldsymbol{f(2,2)=\max\{2,2\}=2}$**

נכתוב את הפונקציה כהטלאה :

$$f(x,y)=\max\{x,y\}=\begin{cases}x, & y<x\\ y, & y\geq x\end{cases}$$

נצייר מפת עש"ע של פונקציית המקסימום :

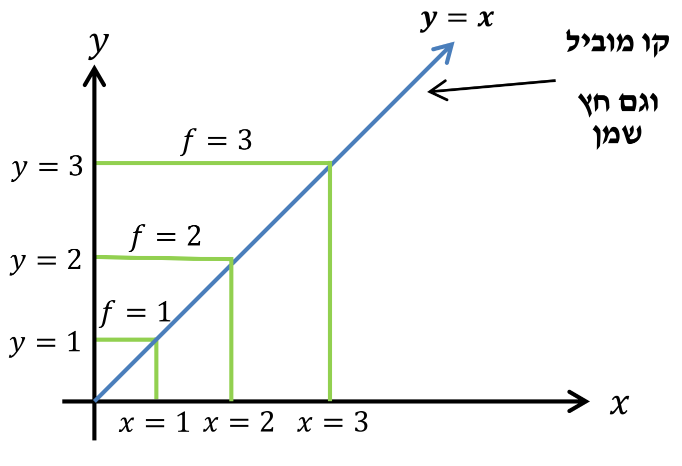
<u>עבור אינדקס $I=1$ :</u>

$$f(x,y)=\max\{x,y\}=1 => \begin{cases}x=1, & y<x\\ y=1, & y\geq x\end{cases}$$

מתוך תחום ההגדרה של הפונקציה $f$ אנו מבינים כי הקו המחלק אותה לשני תחומים הוא הישר $y=x$ .

קו זה הוא קו חשוב מאוד לענייננו והוא ייקרא **<u>הקו המוביל</u>**.

אם כך – נצייר, ברביע הראשון, את העקומה שהתקבלה :



## נגזרות חלקיות

נתונה פונקציה בשני משתנים $\boldsymbol{f(x,y)=x^2+y^3}$

נגדיר:

**$f_x$ – נגזרת חלקית לפי המשתנה $x$.**

**$f_y$ – נגזרת חלקית לפי המשתנה $y$.**

בגזירה לפי המשתנה $x$ – נתייחס לכל שאר האותיות כאל **מספרים!**

בגזירה לפי המשתנה $y$ – נתייחס לכל שאר האותיות כאל **מספרים!**

נגזור את הפונקציה שלעיל:

$f_x=2x+0=2x$

$f_y=0+3y^2=3y^2$

הצג את הנגזרות החלקיות של הפונקציות הבאות:

$$\boldsymbol{f(x,y)=\frac{y}{x^2}=>yx^{-2}}$$

$f_x=y(-2)x^{-3}=>\frac{-2y}{x^3}$

$f_y=x^{-2}=>\frac{1}{x^2}$

$$\boldsymbol{f(x,y)=x^2y^3}$$

$f_x=2xy^3$

$f_y=x^2 3y^2=>3x^2y^2$

גם את הנגזרות האלה ניתן לגזור שוב באופן "חלקי". זה ייראה כך:

אצלנו בקורס תמיד $f_{xy}=f_{yx}$ כאן יוצא $6xy^2$ בשניהם.

$f_{xx}=2y^3$

$f_{yy}=3x^2\cdot 2y=>6x^2y$

$f_{xy}=2x\cdot 3y^2=>6xy^2$

$f_{yx}=3\cdot 2xy^2=>6xy^2$

## סימונים

הפונקציה יכולה להופיע עם משתנים באותיות אחרות לדוגמא $f(a,b)$ ואז הנגזרות החלקיות תהיינה: $f_b$ , $f_a$

סימון נוסף של נגזרות חלקיות יכול להיות גם במספרים. לדוגמא כאשר הפונקציה היא $f(x,y)$,

נוכל לכתוב $f_1$ וזה אומר שגוזרים לפי המשתנה **שמופיע ראשון בסוגריים** – כלומר המשתנה $x$.

אם נכתוב $f_2$ נבין כולנו שמדובר על נגזרת לפי המשתנה $y$ כי הוא מופיע **שני** בסוגריים של הפונקציה.

נתונה הפונקציה: $\boldsymbol{f(z,y,a,b,c) = 2y + 3b + c}$

מהי $f_4$?
תשובה: 3

מהי $f_3$?
תשובה: 0

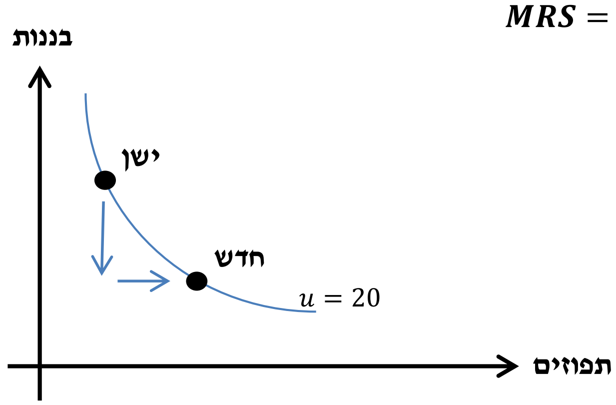
מהי $f_5$?
תשובה: 1

## שימושי הנגזרות החלקיות

### שיעור תחלופה שולי $= MRS$

נתונה פונקציה $u(x,y)$. נצייר את אחת העש״עות שלה כך:

$$MRS = \frac{u_x}{u_y}$$




נניח כי העש״ע היא $u = 20$ ו- $MRS = 0.7$.
מה זה אומר?
זה אומר:
״אם נוותר על 0.7 בננה, נוכל לקנות תפוז אחד,
ועדיין להישאר עם תועלת של 20״.

<u>נקודה ישנה</u> – הסל שלנו <u>לפני</u> הויתור.
<u>נקודה חדשה</u> – הסל שלנו <u>אחרי</u> הויתור.

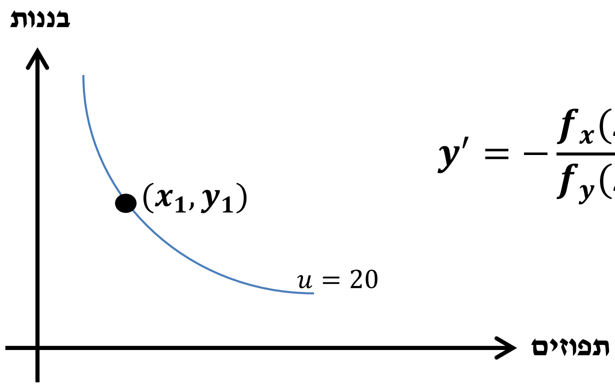
## משפט הפונקציות הסתומות

נתונה עש״ע $f(x,y) = C$ ונקודה על העקומה.

נרצה לדעת את השיפוע בנקודה השחורה המסומנת.

השיפוע בנקודה $(x_1, y_1)$ יהיה:

$$y' = -\frac{f_x(x_1,y_1)}{f_y(x_1,y_1)}$$




### מתי נשתמש?

כאשר הפונקציה $f$ הנתונה – מופיעה בצורה **סתומה**.

**פונקציה סתומה – פונקציה שלא ניתן לבודד בה את $y$.**

נראה דוגמא:

נניח שנתונה לנו הפונקציה $u(x,y) = 4x + 2y$ ואנו רוצים למצוא את העש״ע בעלת האינדקס 4.

אם כך - $4x + 2y = 4$. נעביר אגפים ונבודד את $y$:

$$2y = -4x + 4$$

$$\boldsymbol{y = -2x + 2}$$

מה השיפוע של העש״ע שקיבלנו?
נגזור: $y' = -2$.

השיפוע של הקו הישר שקיבלנו הוא $-2$.
עד כאן בסדר.

עכשיו נציג פונקציה אחרת:

נתונה הפונקציה $f(x,y) = x^2y + x\sqrt{y}$ ואנו רוצים למצוא את העש״ע בעלת האינדקס 4.

אם כך - $x^2y + x\sqrt{y} = 4$. נעביר אגפים ונבודד את $y$:

**איך מבודדים את $y$?! נסו בעצמכם... זה כמעט בלתי אפשרי (!)**

במקום לבצע זאת – נשתמש במשפט הפונקציות הסתומות או בקיצור מפ״ס.

## <u>**קואזי קעירות/קמירות**</u>

<u>הקדמה:</u>

בחלק מהמקרים נקבל עש"ע כלשהי ולא נדע לשרטט אותה.

לא נדע אם היא עולה או יורדת. לא נדע אם היא קעורה או קמורה.

<u>**דוגמא:**</u>

נתונה הפונקציה: $f(x,y) = 2lnx + 3lny$
(נשים לב לתחום הגדרה(!) $x > 0, y > 0$ כי הפונקציה $ln$ מקבלת אליה רק מספרים חיוביים (!) )

<u>נדרש: לשרטט מפת עקומות שוות ערך של הפונקציה.</u>

נבחר נניח אינדקס $I = 1$.

אם כך: $2lnx + 3lny = 1$. איך משרטטים את העש"ע הזו? זו פונקציה שאנחנו לא יודעים איך היא נראית...

ננסה לבודד את $y$ בשביל לגזור. אי אפשר... מה עושים?

תשובה: נבצע חקירה מהירה:

$$f_x = \frac{2}{x}$$

$$f_y = \frac{3}{y}$$

לפי משפט הפונקציות הסתומות... אנו יודעים כי $\boldsymbol{y' = -\frac{f_x}{f_y}}$

כלומר: $y' = -\frac{\frac{2}{x}}{\frac{3}{y}} => -\frac{2y}{3x} < 0$ אנו זוכרים ש- $x > 0, y > 0$ ולכן $y' < 0$ כלומר הפונקציה יורדת!

עד כאן הישג מרשים...

אבל באיזה אופן היא יורדת? היא קמורה או קעורה? איך נדע?

תשובה: <u>**קואזי קעירות/קמירות!**</u>

נלמד בעמוד הבא...

## קואזי קעירות/קמירות

תנאי למשפט: $f_x, f_y > 0$.

התנאי מתקיים אצלנו? כן! כי $f_x = \frac{2}{x} > 0 \quad , \quad f_y = \frac{3}{y} > 0$

נבנה את הביטוי הבא:

$$\boxed{\mathbf{D} = f_{xx} \cdot f_y^2 + f_{yy} \cdot f_x^2 - 2 \cdot f_{xy} \cdot f_x \cdot f_y}$$

**אם $D > 0$ – עש"ע קעורות**

**אם $D < 0$ – עש"ע קמורות**

עד עכשיו יש לנו:

$$f_x = \frac{2}{x}$$

$$f_y = \frac{3}{y}$$

צריך עוד נגזרות:

$$f_{xx} = -\frac{2}{x^2}$$

$$f_{yy} = -\frac{3}{y^2}$$

$$f_{xy} = 0$$

נמצא את $D$:

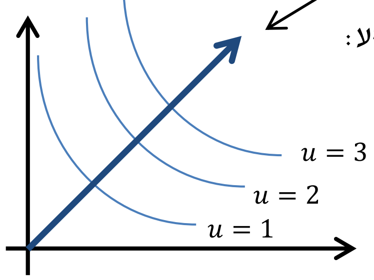
$$D = -\frac{2}{x^2} \cdot \left(\frac{3}{y}\right)^2 - \frac{3}{y^2} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^2 - 2 \cdot 0 \cdot \frac{2}{x} \cdot \frac{3}{y}$$

$$D = -\frac{18}{x^2 \cdot y^2} - \frac{12}{(x^2 \cdot y^2)} = -\frac{30}{x^2 y^2} < 0$$

**קיבלנו $D < 0$ - כלומר עש"עות קמורות.**

נצייר סקיצה של העש"ע:

יורדת + קמורה




**<u>כיוון החץ השמן</u>**

איפה נמצאת העש"ע הבאה? מה כיוון ההתקדמות התועלת?

אם $f_x, f_y > 0$ אז החץ השמן מתרחק מראשית הצירים.

אם $f_x, f_y < 0$ אז החץ השמן מתקרב אל ראשית הצירים.

## קיצון ללא אילוץ

נקבל פונקציה בשני משתנים $f(x,y)$ ונחפש לה נקודת קיצון.

נקודה זו יכולה להיות min או $max$.

**נתחיל מתנאי סדר ראשון,** נבנה את המשוואות הבאות:

$$\boxed{\begin{aligned} f_x &= 0 \\ f_y &= 0 \end{aligned}}$$

מתקבלת מערכת של 2 משוואות בשני נעלמים. נפתור אותה.

נקבל נקודות חשודות כקיצון: $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \dots (x_m, y_m)$

**תנאי סדר שני:**

נגזור פעם שנייה לפי $x$ ופעם שנייה לפי $y$. נגזור גם מעורב. נציב בביטוי הבא:

$$\boxed{\Delta = f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2}$$

אם $\Delta > 0$ אז החשודה היא קיצון ואז בודקים:

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{אם } f_{xx} < 0 \text{ אז זו נקודת } max \\ &\text{אם } f_{xx} > 0 \text{ אז זו נקודת } min \end{aligned}}$$

אם $\Delta < 0$ אז החשודה היא נקודת אוכף.

אם $\Delta = 0$ אז ייתכן שהנקודה היא קיצון וייתכן שהיא לא קיצון.

# קיצון תחת אילוץ

נושא מרכזי וטכני – שאלה פתוחה שלמה במבחן.
מכיל נגזרות חלקיות, עש״עות ואולי עוד נושאים. השליטה בנושא מגיעה מתרגול רב.

נקבל פונקציה בשני משתנים $f(x,y)$ ונדרש לחפש לה נקודת קיצון תחת אילוץ מסוים.

נדבר על:

**א. מבוא:** סיפור + ניסוח הבעיה שלפנינו

**ב. הפתרון האלגברי**

1. תנאי סדר ראשון – למציאת נקודות חשודות כקיצון
2. תנאי סדר שני – לקביעת סוג הקיצון (מינימום, מקסימום, אוכף, לא ניתן לדעת)

**ג. הפתרון הגרפי**

---

**א. מבוא:** סיפור + ניסוח הבעיה שלפנינו

לפרט יש פונקציית תועלת $u(x,y)$ ( $x$ – שוקולדים, $y$ – חטיפים )

עלות 1 שוקולד היא $P_1$

עלות 1 חטיף היא $P_2$

לפרט יש תקציב של $I$ ש״ח.

נגדיר את הבעיה כך:

$$\max \{u(x,y)\} \quad S.T \quad xP_1 + yP_2 = I$$

## ב. הפתרון האלגברי לבעיית קיצון תחת אילוץ

### 1. תנאי סדר ראשון – למציאת נקודות חשודות כקיצון

$$max/min \quad \{f(x,y)\} \quad S.T \quad g(x,y) = C$$

מה נעשה? נבנה את המשוואות הבאות:

נגזור את $g$ לפי $x$ ← $f_x = \lambda \cdot g_x$ → נגזור את $f$ לפי $x$

נגזור את $g$ לפי $y$ ← $f_y = \lambda \cdot g_y$ → נגזור את $f$ לפי $y$

נכתוב את האילוץ כמו שהוא ← $g(x,y) = C$

מתקבלת מערכת של 3 משוואות בשלושה נעלמים. נפתור אותה.

נקבל נקודה חשודה כקיצון: $(x^*, y^*, \lambda)$

### 2. תנאי סדר שני – לקביעת הסוג של נקודות הקיצון

נבנה את הביטוי הבא:

$$\boxed{H = (f_{xx} - \lambda g_{xx})g_y^2 + (f_{yy} - \lambda g_{yy})g_x^2 - 2(f_{xy} - \lambda g_{xy})g_x g_y}$$

$H < 0 \rightarrow max$

$H > 0 \rightarrow min$

**בפועל, בכל תרגיל בנושא הזה:**

1. נגזור באופן טכני 5 נגזרות של $f$: $f_x, f_y, f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}$
2. נגזור באופן טכני 5 נגזרות של $g$: $g_x, g_y, g_{xx}, g_{yy}, g_{xy}$
3. נציב במשוואות המתאימות שלמעלה ונפתור...

**ג.** הפתרון הגרפי לבעיית קיצון תחת אילוץ

מה עושים?

**נצייר במערכת צירים אחת את האילוץ ואת מפת העש"ע.**

נראה, איכותית, את מיקום נקודת הקיצון ונסביר למה בחרנו נקודה זאת.

לאחר מכן נענה על השאלות נלוות לאיור.

נראה דוגמא כללית:

# פונקציות הומוגניות

הגדרה:

**פונקציה $f(x,y)$ תיקרא הומוגנית מסדר $n$ אם מתקיים $f(tx,ty)=t^n\cdot f(x,y)$**

נראה כיצד בודקים האם פונקציה נתונה היא הומוגנית או לא. (לאחר מכן נבין מה זה אומר לנו...)

תרגיל:

נתונה הפונקציה $f(x,y)=\sqrt[3]{x^2+xy+y^2}$. האם היא הומוגנית?

נציב בפונקציה את הסל $(tx,ty)$, לפי אגף שמאל, ונראה לאן זה מוביל אותנו.

$$\boldsymbol{f(tx,ty)} \Rightarrow \sqrt[3]{(tx)^2+txty+(ty)^2} \Rightarrow \sqrt[3]{t^2x^2+t^2xy+t^2y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{t^2(x^2+xy+y^2)} \Rightarrow \sqrt[3]{t^2}\cdot\sqrt[3]{x^2+xy+y^2} \Rightarrow \boldsymbol{t^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{x^2+xy+y^2}}$$

קיבלנו:

$$\boldsymbol{f(tx,ty)=t^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{x^2+xy+y^2}}$$

זו בדיוק הגדרת ההומוגניות בעבור $f(x,y)$ הנתונה כאשר $n=\frac{2}{3}$.

**מסקנה: $f$ היא הומוגנית מסדר $\frac{2}{3}$.**

מה זה אומר לנו?

ניקח $t=4$ לדוגמא.

כלומר במקום להציב את הסל $(x,y)$ נציב את הסל $(4x,4y)$. (סל עם פי 4 מוצרים מכל סוג!)

לפי הגדרת ההומוגניות נקבל:

$$f(4x,4y)=4^{\frac{2}{3}}\cdot f(x,y)$$

$$f(4x,4y)=2.52\cdot f(x,y)$$

**שימו לב - הגדלנו את הסל פי $4$ והתועלת גדלה פי $2.52$ (!)**

# **<u>פונקציות הומוגניות - המשך</u>**

<u>הסבר הנושא:</u>

**בנושא זה נבדוק את ההשפעה של הגדלת/הקטנת הסל שנכנס אל הפונקציה על התועלת שהיא מוציאה.**

דוגמא: נגדיל את הסל שלנו ב- 20% - <u>איך זה ישפיע על התועלת שנקבל?</u>

עוד דוגמא: נקטין את הסל שלנו ב- 35% - <u>איך זה ישפיע על התועלת שנקבל?</u>

**שינוי התועלת כתוצאה משינוי הסל**

**הסל אחרי השינוי**

**הסל לפני השינוי**

$$\boldsymbol{f(tx,ty) = t^n \cdot f(x,y)}$$

## **<u>תכונות של פונקציות הומוגניות</u>**

כל פונקציה הומוגנית מקיימת את התכונות הבאות: (חשוב!)

1. אם $f$ הומוגנית מסדר $n$ אז הנגזרות החלקיות $f_x, f_y$ הומוגניות מסדר $n-1$.

2. אם $f$ הומוגנית מסדר $n$ אז מתקיימת נוסחת אוילר:

$$\boxed{\boldsymbol{x \cdot f_x(x,y) + y \cdot f_y(x,y) = n \cdot f(x,y)}}$$

# סיכום אינטגרלים

## פונקציה קדומה

**הגדרה:** הפונקציה $F(X)$ נקראת פונקציה קדומה לפונקציה הנתונה $f(x)$, אם $F'(X) = f(x)$ לכל $x$ המוגדר בתחום של $f(x)$. מקור השם פונקציה קדומה בא מכך שהפונקציה $f(x)$ מתקבלת מגזירה של- $F(X)$ ומשתמע מכך ש $F(X)$ קודמת ל- $f(x)$.

**כלל:** אם $F(X)$ היא פונקציה קדומה של $f(x)$ אז כל פונקציה מהצורה $F(X) + C$ היא פונקציה קדומה שלה.

תהליך מציאת הפונקציה הקדומה נקרא **אינטגרציה**.

אוסף כל הפונקציות הקדומות של $f(x)$ נקרא **אינטגרל בלתי מסוים** ומסומן ב- $\int f(x)dx$.

## כללי אינטגרציה בסיסיים

האינטגרל הוא ביצוע של פעולה הפוכה לנגזרת, עבור כללי הגזירה הבסיסיים יש כללי אינטגרציה מתאימים.
להלן מספר אינטגרלים והפונקציה הקדומה המתאימה להם.
חובה להכיר אותם טוב טוב מאחר והם התשתית לנושא האינטגרלים.
הפרמטר $C$ לא חייב להיות זהה בכל נוסחה וניתן להחליף בקבוע D, K או כל אות אחרת.

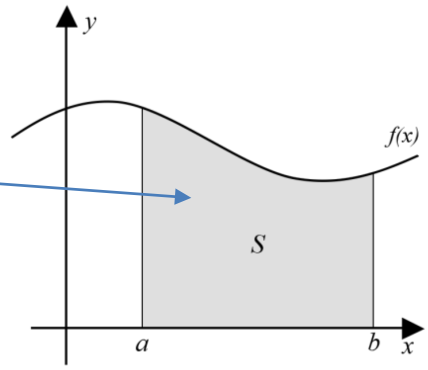
| אינטגרל | פונקציה קדומה |
|---|---|
| $\int x^n dx =$ | $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ |
| $\int a dx =$ | $ax + C$ |
| $\int (ax+b)^n dx =$ | $\frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)\cdot a} + C$ |
| $\int e^x dx =$ | $e^x + C$ |
| $\int e^{mx} dx =$ | $\frac{1}{m}e^{mx} + C$ |
| $\int e^{-x} dx =$ | $-e^{-x} + C$ |
| $\int \frac{1}{x} dx =$ | $ln\|x\| + C$ |
| $\int \frac{1}{ax+b} dx =$ | $\frac{1}{a}ln(ax+b) + C$ |

## האינטגרל המסוים

נתונה הפונקציה $f$ והאינטגרל עבורה מסומן כך- $\int_a^b f(x)dx$

האינטגרל המסוים הזה מתאר את השטח הכלוא מתחת לגרף הפונקציה נתונה ומעל ציר ה- $x$ בקטע $[a,b]$.

**$\int_a^b f(x)dx$ - זה השטח הכלוא בקטע $[a,b]$.**




הגדרת האינטגרל המסוים היא שטח נטו בין הפונקציה לציר $x$.

השטח הוא:

$$S = \int_a^b (\text{פונקציה עליונה} - \text{פונקציה תחתונה})dx$$

מחשבים את האינטגרל ומקבלים את הקדומה F.

לאחר מכן עוברים למשפט היסודי הראשון:

## המשפט היסודי הראשון

הכלי הבסיסי לחישוב אינטגרלים מסויימים (שטח אצלנו בקורס). להלן המשפט:

**אם $f$ רציפה ו- $F$ קדומה של $f$ בקטע $[a,b]$ אז** $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

ממשפט זה אנו מבינים כי ניתן למצוא, בשלב ראשון, את הפונקציה הקדומה לפונקציה $f$, היא הפונקציה $F$, ולהציב בה את ערכי הקצה של הקטע הנתון. (קודם את $b$ ואז את $a$).

נבצע **חיסור** בין שני הערכים הללו ונקבל את **השטח** המבוקש.

שימו לב טוב – קיבלנו את השטח רק מכיוון שהפונקציה $f(x)$ אכן תוחמת את השטח מלמעלה וגם $y = 0$ היא הפונקציה התחתונה. (ציר $x$)