חוקי חזקות ושורשים

הקדמה:

1. **מבנה חזקה:**

חזקה היא ביטוי בעל המבנה הבא: a^b

הגדרות:

a – בסיס החזקה.

b – מעריך החזקה.

2. **חזקה -** הפעולה המתמטית הנה **הכפלת בסיס החזקה בעצמו כמספר פעמים המופיע במעריך החזקה.**

לדוגמא: $\boxed{x^3 = x \cdot x \cdot x}$ (הכפלת איקס בעצמו 3 פעמים).

3. **שימושים בקורס שלנו:**

חלק מרכזי בקורס ייגע בפונקציות מסוג פולינום. פונקציות כאלה מכילות חזקות בהגדרה.
בחישוב גבולות של פונקציות כאלה, בחקירת פונקציות, בפתרון משוואות, בפתרון של טורים,
בכל אלה נהיה חייבים להשתמש ב **"חוקי החזקות השורשים"** הנלמדים במסמך זה.
אם כך, נתחיל!

סיכום חוקי חזקות ושורשים

1. **עבור מצב שבו יש בסיסי חזקות זהים:**

- כאשר יש **כפל** בין בסיסים זהים, **נחבר בין המעריכים שלהם כך**: $\boxed{x^n \cdot x^m = x^{n+m}}$
- כאשר יש **חילוק** בין בסיסים זהים, **נכתוב את הבסיס בחזקת "מעריך מונה" פחות "מעריך מכנה" כך**: $\boxed{\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}}$

2. **עבור מצב שבו יש חזקה שמועלית בעוד חזקה:**

- כאשר יש ביטוי שבו **חזקה מועלית בעוד חזקה**, נכתוב את **הבסיס בחזקת מכפלת המעריכים כך**: $\boxed{(x^n)^m = x^{n \cdot m}}$

3. **עבור מצב שבו יש בסיסי חזקות שונים אבל המעריכים זהים:**

- **בכפל** בין **בסיסים שונים עם מעריך זהה**, **נכפיל** את הבסיסים **ונעלה בחזקת המעריך כך**: $\boxed{a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n}$
- **בחילוק** בין **בסיסים שונים עם מעריך זהה**, **נחלק** בין הבסיסים **ונעלה את המנה בחזקת המעריך כך**: $\boxed{\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n}$

4. **<u>הפיכת מעריך חיובי למעריך שלילי:</u>**

- במקום בסיס בחזקת מעריך שלילי, נכתוב: **1 חלקי הבסיס באותו מעריך – אך חיובי כך:** $\boxed{x^{-n}=\frac{1}{x^n}}$

- במקום שבר בחזקת מעריך שלילי, נכתוב: **ההופכי של אותו שבר בחזקת אותו מעריך – אך חיובי כך:** $\boxed{(\frac{a}{b})^{-n}=(\frac{b}{a})^n}$

5. **<u>משוואה מעריכית</u>:**

- כאשר מתקיים שוויון בין שני אגפים **<u>בהם הבסיסים זהים</u>**, ניתן להסיק שמתקיים שוויון גם בין המעריכים של הבסיסים כך:

אם $\boxed{x^a=x^b}$ אז $\boxed{a=b}$

6. **<u>מעבר בין חזקה לשורש</u>:**

- כאשר יש חזקה (n) של מספר שנמצא בתוך שורש מסדר (m), נכתוב אותו כך – **<u>ה- m יהפוך להיות המכנה של המעריך החדש, ואילו ה- n יהפוך להיות המונה של המעריך החדש</u>**. $\boxed{\left(\sqrt[m]{a}\right)^n=a^{\frac{n}{m}}}$

- נשים לב כי כאשר לא מופיע סדר בשורש, מדובר בשורש מסדר שני (2). כך: $\boxed{\left(\sqrt{a}\right)^n=\sqrt[2]{a}^n=a^{\frac{n}{2}}}$

- הערה נוספת: אין חשיבות למיקומו של מעריך השורש (n) כלומר התוצאה שתתקבל זהה גם אם הוא מתחת לשורש וגם אם הוא מחוץ לסוגריים. כך: $\boxed{(\sqrt[m]{a})^n=(\sqrt[m]{a^n})=a^{\frac{n}{m}}}$

7. עבור מצב שבו יש **<u>בסיסי שורש זהים</u>:**

- **<u>בכפל</u>** בין בסיסים זהים אשר נמצאים תחת שורש מסדר 2 **<u>יתקבל הבסיס ללא השורש</u>**

כך: $\boxed{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=x^1=x}$

- **<u>בכפל</u>** בין בסיסים זהים אשר לא נמצאים תחת שורש מסדר 2, **<u>נמיר את השורש לחזקה ונפתור באמצעות החוקים שלמדנו</u>**

כך: $\boxed{\sqrt{a}\cdot\sqrt[5]{a}=a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{5}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}=a^{\frac{5}{10}+\frac{2}{10}}=a^{\frac{7}{10}}=\sqrt[10]{a^7}}$

- בביטוי בו יש **<u>שורש של שורש נכפול בין סדר השורשים</u>**. התוצאה שתתקבל תהיה סדר השורש

כך: $\boxed{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m\cdot n]{a}}$

8. עבור מצב שבו יש **<u>בסיסי שורש שונים</u>**:

- **<u>בכפל</u>** בין **<u>שורשים מסדר זהה</u>**, **<u>נכפול בין הבסיסים אשר בתוך השורש ונוציא לתוצאה שורש מאותו הסדר כך</u>**: $\boxed{\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}}$

- **<u>בחילוק</u>** בין **<u>שורשים מסדר זהה</u>**, **<u>נחלק בין הבסיסים אשר בתוך השורש ונוציא למנה שורש מאותו הסדר כך</u>**: $\boxed{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}}$

עד כאן חוקי חזקות ושורשים – סיכום נוסחאות

עכשיו לתרגול - בהצלחה!

הגדרת הלוגריתם וחוקי לוגריתמים

הגדרת הלוגריתם:

$$a^x = b \rightarrow x = log_a b$$

המספר x שאותו אנחנו מחפשים, הוא הלוגריתם של b לפי הבסיס a, המסומן $log_a b$.

a- מספר חיובי שונה מ-1.
b- מספר חיובי כלשהוא.

בסיסים שונים ללוגריתם:

בסיס 10- הבסיס העשרוני בו אנחנו רגילים לספור . לדוגמא : $log_{10}5$.
מוסכם שאם לא מצוין בסיס ללוג, מדובר בבסיס 10.

בסיס 2- זהו הבסיס הבינארי.

בסיס e- נקרא הלוגריתם הטבעי. זהו מספר אי רציונלי שערכו $e = 2.718281828459$
ללוגריתם זה יש שם מיוחד : $log_e x = lnx$.

חוקי הלוגריתם:

לוגריתם של 1: $log_a 1 = 0$

לוגריתם של ביטוי שזהה לבסיס: $log_a a = 1$

לוגריתם של מכפלה: $log_a(bc) = log_a b + log_a c$

לוגריתם של מנה: $log_a\left(\frac{b}{c}\right) = log_a b - log_a c$

לוגריתם של חזקה: $log_a b^c = c \cdot log_a b$

לוגריתם של שורש מסדר כלשהוא: $log_a \sqrt[n]{b} = \frac{log_a b}{n}$

נוסחת שינוי בסיס: $log_c b = \frac{log_a b}{log_a c}$

<u>פונקציה מוטלאת</u>

<u>הקדמה:</u>
חברים, התלבטתי אם להכניס את המסמך הזה למכינה.
החומר המדבר על פונקציה מוטלאת הוא **<u>חלק בלתי נפרד מהקורס עצמו</u>** והוא נלמד במלואו בקורס.
עם זאת, זהו חומר מורכב יחסית. הוא דורש הבנה עמוקה ולוקח זמן עד ש"האסימון נופל".
לכן, ראו מסמך זה כ"ריפוד" מצוין שיעזור לכם להגיע עם יתרון יחסי לקורס.
<u>הנושא נכלל במספר רב של שאלות במבחן.</u>
<u>נתחיל:</u>

<u>פונקציה מוטלאת</u> = <u>פונקציה שמחולקת למספר ענפים.</u> (למספר תחומים שונים)

<u>דוגמא:</u>

$$g(x)=\begin{cases} 8x-1 \;, & x\geq 0 \\ x+15 \;, & -2<x<0 \\ x^3+4x+8 \;, & x\leq -2 \end{cases}$$

<u>נקודת הטלאה</u> = <u>נקודה המחלקת את הגרף לחלקים השונים שלו.</u>

אנחנו נלמד להסתכל על הפונקציה **<u>כעל טבלה (!)</u>:**

שם הפונקציה	התנהגות הפונקציה	תחומי האיקס
g(x)	$8x-1$	$x\geq 0$
	$x+15$	$-2<x<0$
	x^3+4x+8	$x\leq -2$

ועכשיו במילים:

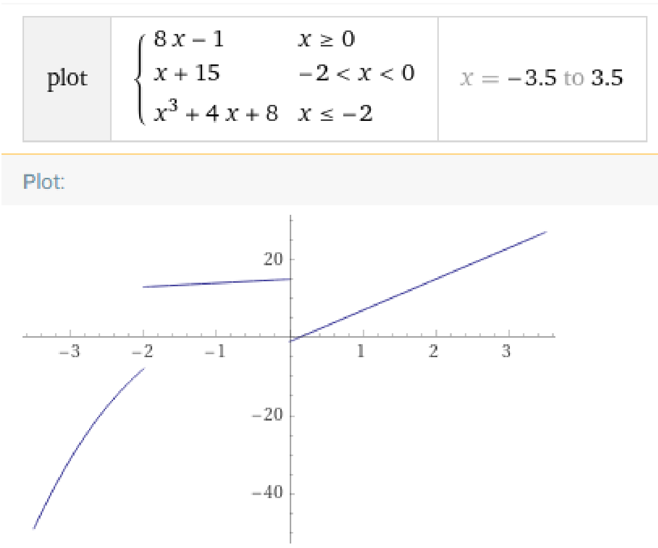
שם הפונקציה	התנהגות הפונקציה	תחומי האיקס
g(x)	קו ששיפועו 8	כאשר איקס גדול או שווה 0
	קו ששיפועו 1	כאשר איקס בין מינוס 2 ל-0
	פולינום ממעלה שלישית	כאשר איקס קטן או שווה מינוס 2

עכשיו הסבר מה קורה כאן:
חברים, הגרף מחולק **<u>ל-3 תחומים שונים (!)</u>:**

1. בתחום שבו איקס נמצא באפס ומימין לו – הגרף יהיה מצויר כ**קו ישר ששיפועו 8**. (כי זו פונקציית הקו הישר)
2. בתחום שבו איקס נמצא בין מינוס 2 ל-0 - הגרף יהיה מצויר כ**קו ישר ששיפועו 1**. (כי זו פונקציית הקו הישר)
3. בתחום שבו איקס נמצא במינוס 2 ושמאלה - הגרף יהיה מצויר כ**פולינום ממעלה שלישית**. (עולה ויורד בצורה כלשהי)

נקודות ההטלאה בדוגמא זו: $\mathbf{x=0}$ <u>וגם</u> $\mathbf{x=-2}$

<u>תראו את הגרף:</u>



<u>דוגמא נוספת:</u>

$$f(x) = \begin{cases} x^2+4x+6, & x \geq 1 \\ 9\ , & -3 < x < 1 \\ \sin x + 8\ , & x \leq -3 \end{cases}$$

כאמור, מסתכלים על הפונקציה <u>**כמו על טבלה (!):**</u>

שם הפונקציה	התנהגות הפונקציה	תחומי האיקס
f(x)	x^2+4x+6	$x \geq 1$
	9	$-3 < x < 1$
	$\sin x + 8$	$x \leq -3$

עכשיו במילים:

שם הפונקציה	התנהגות הפונקציה	תחומי האיקס
f(x)	פונקציה ריבועית	כאשר איקס גדול או שווה 1
	פונקציה קבועה בגובה 9	כאשר איקס בין מינוס 3 ל-1
	פונקציית סינוס ועוד קבוע	כאשר איקס קטן או שווה מינוס 3

עכשיו הסבר מה קורה כאן:

כאמור, חברים, הגרף מחולק <u>**ל-3 תחומים שונים (!).**</u>

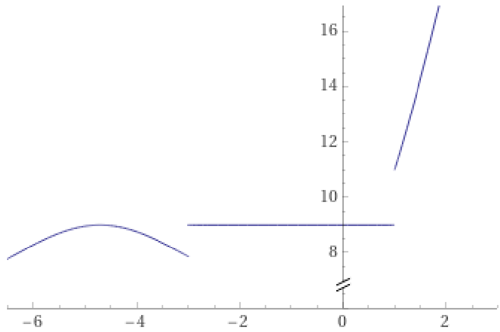
1. בתחום שבו איקס נמצא באחד ומימין לו – הגרף יהיה מצויר כ**פונקציה ריבועית**. (פרבולה/פולינום ממעלה שנייה)
2. בתחום שבו איקס נמצא בין מינוס 3 ל-1 - הגרף יהיה מצויר כ**קו ישר, אופקי, בגובה 9**. (כי זו פונקציית הקו הישר)
3. בתחום שבו איקס נמצא במינוס 3 ושמאלה - הגרף יהיה מצויר כ**פונקציית סינוס**.

נקודות ההטלאה בדוגמא זו: $\mathbf{x = 1}$ <u>וגם</u> $\mathbf{x = -3}$

<u>תראו את הגרף:</u>

plot $\begin{cases} x^2+4x+6 & x \ge 1 \\ 9 & -3 < x < 1 \\ \sin(x)+8 & x \le -3 \end{cases}$ $x = -6.5$ to 3

Plot:



שימו לב,
זו הייתה הקדמה לנושא ובסיס טוב שלו.
בקורס עצמו נלמד מושגים כמו **גבול**, **רציפות**, **גזירות** ונרצה לדון בהם על גבי פונקציה מוטלאת.
כשנעשה זאת, רוב הדיון יהיה על **<u>ההתנהגות בנקודות ההטלאה עצמן</u>**.
עוד חזון למועד...

<u>עד כאן הדיון על פונקציה מוטלאת</u>

<u>קדימה לתרגול !</u>

פונקציית הערך המוחלט

הקדמה

חברים, פונקציית הערך המוחלט היא הפונקציה האהובה על חזי, הרכז של קורס חדו״א א׳ באוניברסיטה הפתוחה.
בכל מבחן בקורס, יש מספר רב, יחסית, של שאלות אשר נוגעות, בדרך כזו או אחרת, במאפייני הפונקציה.
מכאן החשיבות הרבה של מסמך זה.
העוקץ, בהקשר של הפונקציה הזו, הוא בכך שהיא מכילה, בעצם, שתי פונקציות שונות, אותן אנחנו לא רואים.
בהינתן פונקציית ערך מוחלט, עלינו, בשלב ראשון, לפתוח אותה להטלאה, ולאחר מכן להמשיך לפתרון התרגיל.

מסמך זה, והתרגול הבא אחריו, מכילים את כל הידע הנדרש עבורכם לקורס. מהבסיס ועד רמת מבחן.
בהצלחה !

נתחיל בסימון של הפונקציה

פונקציית הערך המוחלט תסומן כך : $|\ |$ (שני קווים אנכיים מקבילים)

הגדרה גיאומטרית

ערך מוחלט = ״המרחק מראשית הצירים״

המפעל, פונקציית הערך המוחלט, יכולה לקבל אליה כל איקס (מתוך המספרים הממשיים בהם אנו עוסקים בקורס),
והיא מוציאה כפלט את **המרחק של המספר מנקודת האפס** .

מסקנה : תוצאת הפונקציה תהיה, תמיד, (!) חיובית.

דוגמא:

מהם האיקסים אשר פותרים את המשוואה הבאה : $|x| = 2$

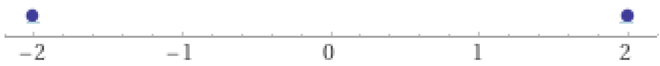
מבקשים מאיתנו, בעצם, למצוא את האיקסים <u>שמרחקם מנקודת האפס</u> הוא 2 .

ובכן, פתרון אחד יהיה $x = 2$. אבל האם יש פתרון נוסף? חישבו על זה.

התשובה : <u>יש</u>.

הפתרון הנוסף הוא $x = -2$. (בגלל שגם מרחקו מאפס הוא 2. למדנו כעת שמתייחסים למרחק ביחס לשני הכיוונים.

נראה את זה כך :



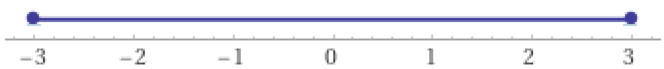
דוגמא נוספת:

מהם האיקסים אשר פותרים את אי השוויון הבא : $|x| \leq 3$

מבקשים מאיתנו, בעצם, למצוא את האיקסים <u>שמרחקם מנקודת האפס</u> קטן או שווה 3.

ובכן, אוסף כל המספרים המקיימים את התנאי הוא : $-3 \leq x \leq 3$.

נראה את זה כך :



הצגה כהטלאה + תיאור גרפי

פונקציית הערך המוחלט הבסיסית תיראה כך :

$$\boxed{f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}}$$

דוגמא :

נכניס אל הפונקציה את $x = 3$, כלומר אנחנו בענף העליון והתשובה היא X, כלומר 3.

כעת נכניס את $X = -4$, אנחנו בענף התחתון הפעם, ונקבל את המינוס **(!)** שלו, כלומר את 4.

מסקנות :

• כשהכנסנו מספר חיובי קיבלנו אותו עצמו כתשובה.
• כשהכנסנו מספר שלילי, קיבלנו את אותו המספר אבל חיובי!

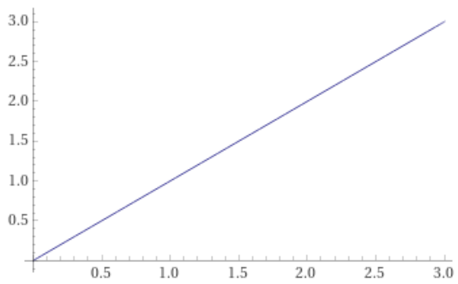
הסבר :

נסתכל שוב על ההטלאה :

$$\boxed{f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}}$$

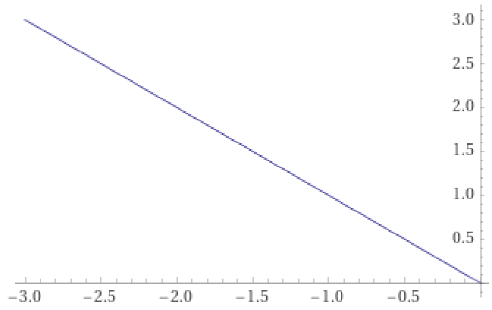
ענף עליון : כאשר איקס גדול או שווה ל-0 אנחנו מקבלים X, כלומר את הישר $y = X$.

נראה את זה בגרף :



ענף תחתון : כאשר איקס קטן מ-0 אנחנו מקבלים $-X$ כלומר את הישר $y = -X$.

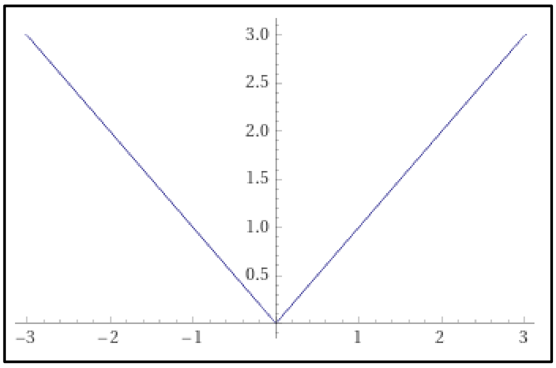
נראה את זה בגרף :



המשך הצגה גרפית:

עכשיו צריך להראות את שני הענפים יחד. (זו אותה פונקציה מחולקת לשני תחומים):
זה בעצם הגרף השלם, הבסיסי והחשוב ביותר בעבורנו **(!)**. הוא ילווה אותנו מכאן והילך.
נציג שוב את ההטלאה ולידה – את הגרף:

$$\boxed{f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}}$$



מסקנות חשובות(!)

- פונקציית הערך המוחלט **מורכבת משתי פונקציות שונות** **(!)** שכל אחת מהן היא פונקציית הקו הישר.
- מימין ל-0 – קו ישר עולה ששיפועו 1 . משמאל ל-0 – קו ישר יורד ששיפועו -1 .
- פונקציית הערך המוחלט **נראית בצורת "V" – תמיד**.
- לפונקציית הערך המוחלט **יש "שפיץ"/"חוד" בנקודה אחת**.
- ה"שפיץ"/"חוד" יימצא תמיד **בנקודה שמאפסת את הביטוי שבתוך הערך המוחלט**.

ביצוע "מניפולציות" (שינויים) בגרף הפונקציה

ניתן לשנות את צורת הגרף על ידי ביצוע שינויים בפונקציה.

1. הזזה –

א. ימינה או שמאלה. **(השינוי מתבצע בתוך הערך המוחלט)**

הזזה ימינה:

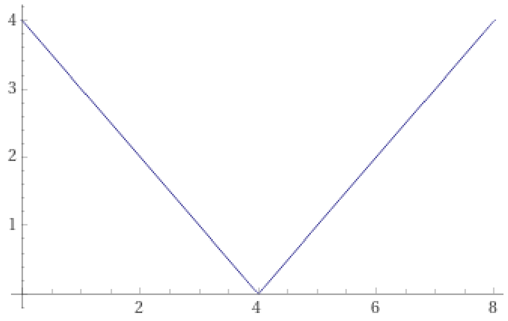
נסתכל על הפונקציה $g(x) = |x-4|$.

איזו נקודה מאפסת את הביטוי שבתוך הערך המוחלט?

נכון, $x = 4$.

זה אומר, אם כן, ש"השפיץ"/"החוד" של הפונקציה זז 4 יחידות ימינה (!) וכעת הוא נמצא בנקודה $x = 4$.

נראה את זה בגרף:



שימו לב: מדובר באותו ה- "V" שהתרגלנו לראות אבל הפעם הוא זז ימינה.

הזזה שמאלה:

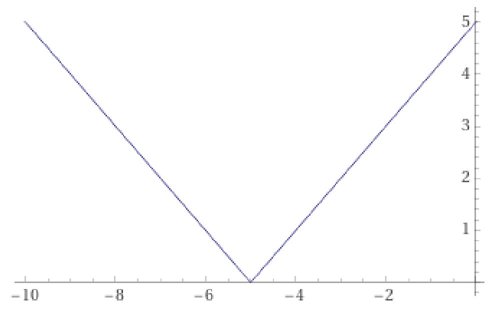
נסתכל על הפונקציה $g(x) = |x+5|$.

איזו נקודה מאפסת את הביטוי שבתוך הערך המוחלט?

נכון, $x = -5$.

זה אומר, אם כן, ש"השפיץ"/"החוד" של הפונקציה זז 5 יחידות ימינה (!) וכעת הוא נמצא בנקודה $x = -5$.

נראה את זה בגרף:



שימו לב: מדובר באותו ה- "V" שהתרגלנו לראות אבל הפעם הוא זז שמאלה.

ב. למעלה או למטה. **(השינוי מתבצע מחוץ לערך המוחלט)**

העלאה למעלה:

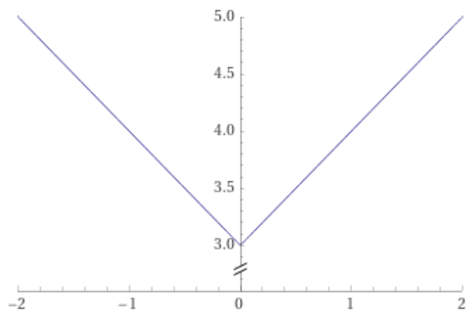
נסתכל על הפונקציה $g(x) = |x| + 3$.

מה קרה כאן?

נכון, העלו את הפונקציה הרגילה ב-3 יחידות כלפי מעלה.

זה אומר, אם כן, ש"השפיץ"/"החוד" של הפונקציה זז 3 יחידות למעלה (!) וכעת הוא נמצא בנקודה $y = 3$.

נראה את זה בגרף:



שימו לב: מדובר באותו ה- "V" שהתרגלנו לראות אבל הפעם הוא זז למעלה.

הורדה למטה:

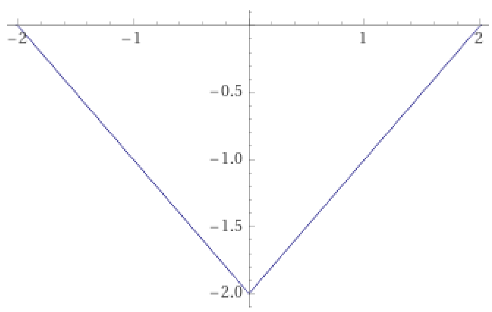
נסתכל על הפונקציה $g(x) = |x| - 2$.

מה קרה כאן?

נכון, הורידו את הפונקציה הרגילה ב-2 יחידות כלפי מטה.

זה אומר, אם כן, ש"השפיץ"/"החוד" של הפונקציה זז 2 יחידות למטה (!) וכעת הוא נמצא בנקודה $y = -2$

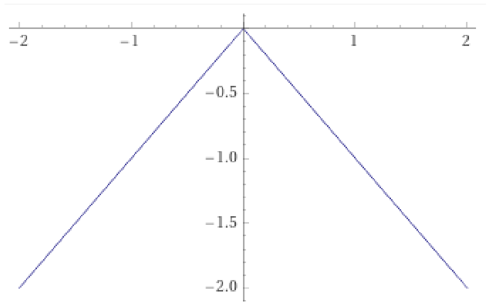
נראה את זה בגרף:



שימו לב: מדובר באותו ה- "V" שהתרגלנו לראות אבל הפעם הוא זז למטה.

2. **הפיכה** - **(השינוי הוא בסימן מינוס שצמוד לערך המוחלט אבל (!) מבחוץ)**

על ידי שינוי קל, נוכל "להפוך" את הגרף כלפי מטה ובכך נראה שה"V" הרגיל יתהפך **(!)**
נסתכל על הפונקציה $g(x) = -|x|$.
מה קרה כאן?
נכון, כל תשובה חיובית שיוצאת מהערך המוחלט – מתהפך לה הסימן לשלילי.
זו הסיבה שבגללה כל הגרף נמצא מתחת לציר X .
נראה את זה בגרף:



שימו לב: מדובר באותו ה- "V" שהתרגלנו לראות אבל הפעם הוא פתוח **כלפי מטה**.

3. פתיחה/כיווץ - (השינוי הוא במקדם של איקס – בתוך הערך המוחלט)

על ידי שינוי קל, נוכל "לפתוח או לכווץ" את ה- "V".

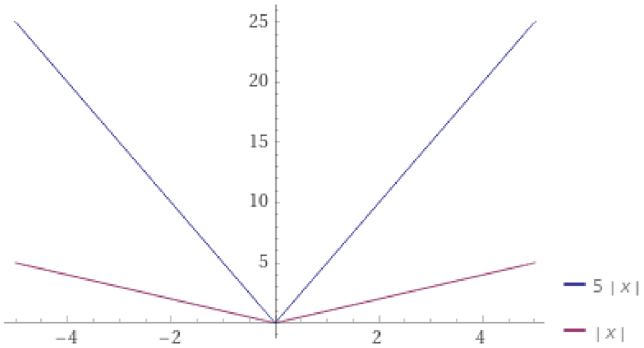
א. "כיווץ"- נסתכל על הפונקציה $g(x) = |5x|$.

מה קרה כאן?

נכון, בחלקו החיובי - הקו הישר עולה למעלה פי 5 מהקו שהכרנו עד כה וזאת מכיוון ששיפועו 5 .

בחלקו השלילי - הקו הישר יורד למטה פי 5 מהקו שהכרנו עד כה וזאת מכיוון ששיפועו -5 .

נציג בגרף השוואה בין ה"V" שהיינו רגילים לראות (בסגול) לבין ה"V" ה"מכווץ" (בכחול) :



שימו לב: מדובר באותו ה- "V" שהתרגלנו לראות אבל הפעם הוא **"מכווץ" פי 5**.

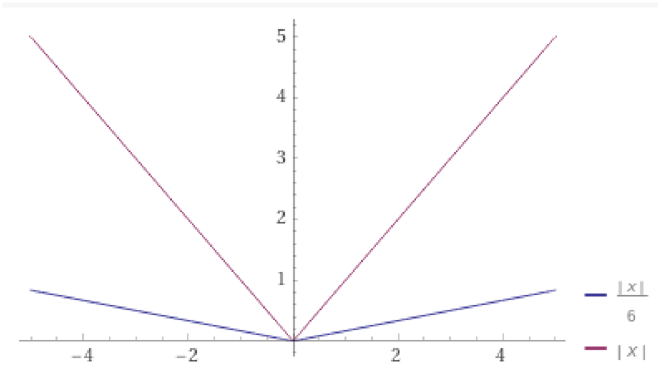
ב. <u>"פתיחה"</u>- נסתכל על הפונקציה $g(x) = \left|\frac{1}{6}x\right|$.

מה קרה כאן?

נכון, <u>בחלקו החיובי</u> - הקו הישר עולה למעלה <u>פי 6 פחות</u> מהקו שהכרנו עד כה וזאת מכיוון ששיפועו $\frac{1}{6}$

<u>בחלקו השלילי</u> - הקו הישר יורד למטה <u>פי 6 פחות</u> מהקו שהכרנו עד כה וזאת מכיוון ששיפועו $-\frac{1}{6}$.

נציג בגרף השוואה בין ה"V" שהיינו רגילים לראות (בסגול) לבין ה"V" ה"פתוח" (בכחול):



שימו לב: מדובר באותו ה- "V" שהתרגלנו לראות אבל הפעם הוא **<u>"פתוח" פי 6</u>**.

עד כאן ההסבר על פונקציית הערך המוחלט

עכשיו לתרגול - בהצלחה!

<u>פונקציות – פולינומים</u>

<u>הקדמה:</u>
אחרי שלמדנו מהי פונקציה באופן כללי, אותו מפעל שמקבל אליו ערכים ומוציא תשובות בהתאם, נתחיל להסתכל על סוגים שונים של פונקציות.
בעצם, ככל שנתקדם בקורס, נלמד על עוד פונקציות.
לכל אחת יהיה גרף המאפיין אותה, תכונות ומאפיינים משלה, תחום הגדרה וערכי פלט שאותם היא יודעת להוציא.
"פונקציית הפולינום" היא מהפונקציות המרכזיות והחשובות ביותר בקורס שלנו.
נלמד עליה כאן.

<u>מבנה פונקציית פולינום:</u>

פונקציית הפולינום היא **<u>כל פונקציה</u>** מהצורה הבאה ו**<u>כל וריאציה של פונקציה זו.</u>** (ראו דוגמאות)
בשלב ראשון – נידרש כולנו – **לזהות ויזואלית שמדובר בפולינום.**

$$p(x) = a_n \cdot x^n \pm a_{n-1} \cdot x^{n-1} \pm a_{n-2} \cdot x^{n-2} \pm a_{n-3} \cdot x^{n-3} \pm \ldots \pm a_1 \cdot x^1 \pm a_0$$

<u>תנאים והסברים – חשוב ביותר בקורס:</u>

- הפרמטר n מייצג **מספר טבעי בלבד(!)** או את המספר 0. כלומר .... $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.
- הפרמטר n מייצג את **מעלת הפולינום** – **היא המעלה הגבוהה ביותר בפולינום**. $(\deg\ p(x))$
- הביטויים הכוללים את הפרמטר a הם "**קבועים**". נקראים גם **המקדמים** של החזקות השונות של איקס.
- הביטויים הכוללים את הפרמטר a יכולים להיות **כל מספר**! (חיובי, שלילי או אפס).
- נשים לב שאם מקדם a כלשהו הוא 0 אז ה- x שמוכפל בו מתאפס ובעצם לא מופיע בפונקציה.
- a_n – **מקדם מוביל** (המקדם של החזקה הגבוהה).
- a_0 – **מקדם חופשי** (אין איקס שצמוד אליו).
- כל מחובר $a_n \cdot x^n$ נקרא "**מונום**".
- שם הפונקציה $\boldsymbol{P}$ הוא שם נהוג לפונקציית הפולינום אבל ניתקל גם ב- f, g, y ואחרים.
- פונקציית הפולינום **מוגדרת לכל x.** (אין לה שום מגבלה).
- פונקציית הפולינום **רציפה וגזירה לכל X** (אלה מושגים שיילמדו בקורס עצמו)
- **מספר נקודות ההתאפסות המקסימלי** של פונקציית הפולינום הוא כמעלת הפולינום.
- **מספר נקודות ההתאפסות המקסימלי של הנגזרת** של פונקציית הפולינום הוא כמעלת הפולינום פחות אחד.

דוגמאות

מושגים : מעלת הפולינום, מקדמים, פלוס/מינוס, חלק מהחזקות בלבד, מקדמים ששווים 0, פונקציה ממעלה 2, פונקציית הקו הישר, פונקציה קבועה.

$$p(x) = 8x^3 - 5x^2 - 3x + 9$$

$$p(x) = 4x^2 + 5x - 1$$

$$p(x) = 16x^5 + 3x^3 + x = 16x^5 + 0 \cdot x^4 + 3x^3 + 0 \cdot x^2 + x + 0$$

$$p(x) = 3x + 8$$

$$p(x) = 2$$

$$p(x) = 0$$

$$p(x) = -3$$

עד כאן הסבר בסיסי על פונקציות פולינום

הרכבת פונקציות

הקדמה:

עד עכשיו ראינו פונקציות שמקבלות אליהן חומר גלם x.
אבל...

פונקציה יכולה לקבל אליה גם פונקציה אחרת כחומר גלם.

מצב זה נקרא **הרכבת פונקציה** כי "נרכיב" פונקציה אחת בתוך אחרת.
הבהרה:

לא מדובר בכפל בין הפונקציות (!)

דוגמא להרכבה:
לפנינו שתי פונקציות: f, g

נגדיר את ההרכבה כך:

$$\mathrm{Y(x)} = \mathrm{f(g(x))}$$

סימון נוסף: $(f^\circ g)(x)$

נגיד: "הפונקציה g מורכבת בתוך הפונקציה f".

מה קרה כאן? (חשוב! תתעכבו על זה עד שתבינו...)

התהליך מתחיל **מבפנים החוצה**:
חומר גלם x נכנס אל הפונקציה g שמקבלת אותו, פועלת עליו ומוציאה כתשובה את $g(x)$.
בשלב הבא $g(x)$ נכנסת אל f והיא פועלת עליו ולבסוף מוציאה את $\mathrm{f(x)}$.

חברים, לפנינו מפעל של 2 מכונות שעובדות בטור.

X (חומר גלם) -> הפונקציה הפנימית **g -> $g(x)$ ->** הפונקציה החיצונית **f-> תוצאה -> $f(x)$**

דוגמא:

$$f(x) = \cos x \qquad\qquad g(x) = x^4 + 8x$$

נבנה את ההרכבה:

$$\mathrm{Y(x)} = \mathrm{f(g(x))}$$

הפונקציה g – היא הפנימית במקרה זה.

הפונקציה f – היא החיצונית במקרה זה.
איך זה נראה?

$$y(x) = \cos(x^4 + 8x)$$

כעת נבנה את:

$$h(x) = g(f(x))$$

הפונקציה f – היא הפנימית במקרה זה.

הפונקציה g – היא החיצונית במקרה זה.
איך זה נראה?

$$h(x) = (\cos x)^4 + 8\cos x$$

<u>תחום הגדרה של הרכבת פונקציות</u>

ההרכבה $f(g(x))$ תהיה מוגדרת בנקודה x כאשר כל התנאים הבאים יתקיימו:

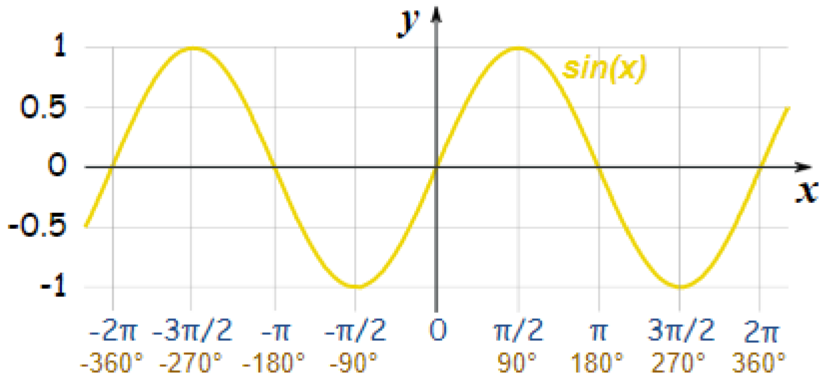
1. x בתחום ההגדרה של הפונקציה הפנימית g.
2. $g(x)$ בתחום ההגדרה של הפונקציה החיצונית f.

חשוב!

<u>עד כאן הדיון בהרכבת פונקציות</u>

פונקציית sinx

1. גרף הפונקציה :



2. תחום הגדרה :

פונקציית ה-sin יכולה לקבל אליה שני סוגי חומר גלם :

- רדיאנים – *rad* - מבחינתנו אלה פשוט מספרים. רוב הקורס נעבוד עם חומר הגלם הזה.
- מעלות – *Degree* – לעיתים נעבוד עם מעלות. (כאשר יופיע סימן °C)

פונקציית ה-sin יכולה לקבל אליה <u>כל איקס</u> (!) שתבחרו באופן חופשי וללא מגבלות.

<u>ערכים חשובים : **(עד מאוד!)**</u>

$$Sin0 = 0$$
$$sin\frac{\pi}{2} = 1$$
$$sin\pi = 0$$
$$sin\frac{3\pi}{2} = -1$$
$$sin2\pi = 0$$
$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$$
$$\sin(-\pi) = 0$$
$$\sin(-\frac{3\pi}{2}) = 1$$
$$\sin(-2\pi) = 0$$

3. ערכי הפלט : - **חשוב עד מאוד (!)**

הסבר : הפונקציה $sinx$ היא פונקציה חסומה **(!)** על ידי שני קווים אופקיים.
העליון $y = 1$ והתחתון $y = -1$
כלומר נכתוב :

$$-1 \le \text{sinx} \le 1$$

במילים פשוטות : **"לא משנה איזה חומר גלם תכניסו אליה – התשובה תנוע בין -1 ל-1 "** .

4. נקודות התאפסות :
הפונקציה $sinx$ מתאפסת על פי הנוסחא הבאה :

$$Sin\,(\pm\pi \cdot k) = 0$$
כאשר k הוא : $0,1,2,3 \ldots n$

5. מחזוריות

הפונקציה $sinx$ היא פונקציה **"מחזורית"**.
מה זה אומר? זה אומר שהיא חוזרת על עצמה בדיוק באותה הצורה, בכל מקטע – מחדש **(!)**.
המחזור של הפונקציה הבסיסית הוא 2π .
נסמן : T - מחזור הפונקציה
שימו לב: על מנת למצוא את המחזור של פונקציית sin שמקבלת אליה חומר גלם שונה, נשאל מתי :

$$f(x) = f(x+T)$$

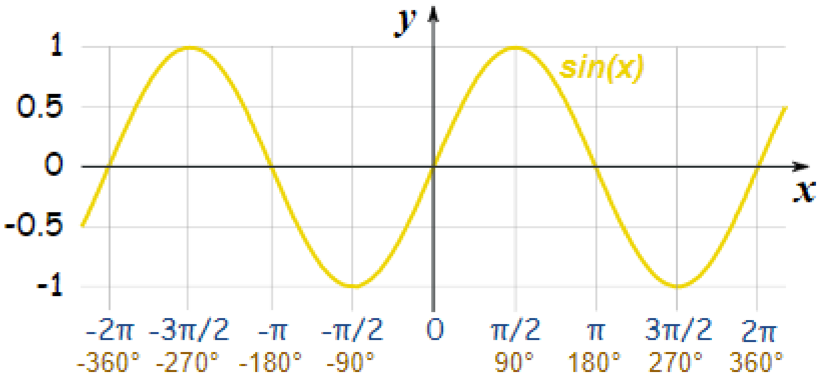
דוגמא :
מהו המחזור של הפונקציה $\sin(3x)$?
פתרון : נכתוב את המשוואה המתאימה

$$\sin(3x) = \sin(3(x+T))$$
$$\sin(3x) = \sin(3x+3T)$$
$$3T = 2\pi$$
$$\boldsymbol{T = \frac{2\pi}{3}}$$

אם כן, **המחזור של הפונקציה $\sin(3x)$ הוא $T = \frac{2\pi}{3}$** .

6. <u>סימטריה</u> – תכונה חשובה בקורס (!)

נסתכל שוב על הגרף של הפונקציה:



כל "הר" בפונקציה, שנמצא מעל ציר X **שווה בגודלו** ל"הר" אחר, שנמצא מתחתיו.
למעשה, כל ה"הרים" שווים בגודלם.

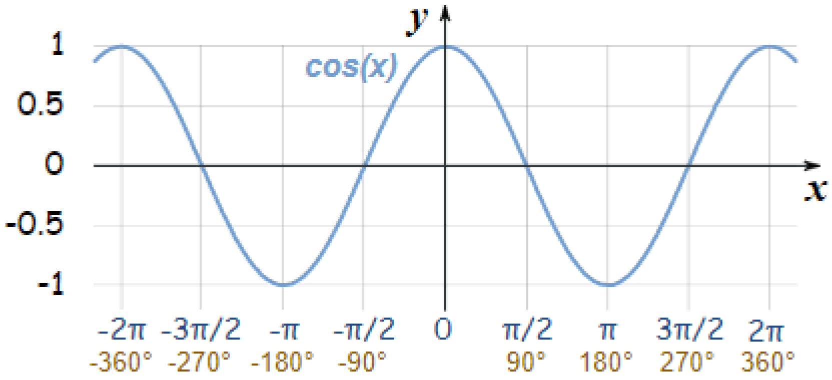
בנוסף, כל נקודה בחלקו החיובי של ציר X סימטרית, כלומר, נמצאת בדיוק באותו המרחק בחלקו השלילי.
בעצם, **יש בפונקציה הרבה "מרחקים" שמעניינים אותנו.**
המרחק בין חומר הגלם, שנותן את שיא הגובה הראשון בצד החיובי, לבין ראשית הצירים = המרחק בין חומר הגלם, שנותן את שיא הגובה הראשון בצד החיובי, לבין נקודת ההתאפסות הראשונה.
דוגמאות לכך נראה בסרטון.

נגיד: "קיימת סימטריה ביחד לציר X וגם ביחס לציר y."

עכשיו כאן פונקציית SIN - בהצלחה!

פונקציית COSX

1. גרף הפונקציה:



2. תחום הגדרה:

פונקציית ה-cos יכולה לקבל אליה שני סוגי חומר גלם:

- רדיאנים – *rad* - מבחינתנו אלה פשוט מספרים. רוב הקורס נעבוד עם חומר הגלם הזה.
- מעלות – *Degree* – לעיתים נעבוד עם מעלות. (כאשר יופיע סימן °C)

פונקציית ה-cos יכולה לקבל אליה <u>כל איקס</u> (!) שתבחרו באופן חופשי וללא מגבלות.

<u>ערכים חשובים</u>: **<u>(עד מאוד!)</u>**

$$cos0 = 1$$
$$cos\frac{\pi}{2} = 0$$
$$cos\pi = -1$$
$$cos\frac{3\pi}{2} = 0$$
$$cos2\pi = 1$$

$$\cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$$
$$\cos(-\pi) = -1$$
$$\cos(-\frac{3\pi}{2}) = 0$$
$$\cos(-2\pi) = 1$$

3. ערכי הפלט: - **חשוב עד מאוד (!)**

הסבר: הפונקציה $cosx$ היא פונקציה חסומה **(!)** על ידי שני קווים אופקיים.

העליון $y = 1$ והתחתון $y = -1$

כלומר נכתוב:

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

במילים פשוטות: **"לא משנה איזה חומר גלם תכניסו אליה – התשובה תנוע בין -1 ל-1"**

4. נקודות התאפסות:

הפונקציה $cosx$ מתאפסת על פי הנוסחא הבאה:

$$cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \pi \cdot k\right) = 0$$

כאשר k הוא: $0,1,2,3 \ldots n$

5. מחזוריות

הפונקציה $cosx$ היא פונקציה **"מחזורית"**.

מה זה אומר? זה אומר שהיא חוזרת על עצמה בדיוק באותה הצורה, בכל מקטע – מחדש **(!)**.

המחזור של הפונקציה הבסיסית הוא 2π .

נסמן: T - מחזור הפונקציה

שימו לב: על מנת למצוא את המחזור של פונקציית cos שמקבלת אליה חומר גלם שונה, נשאל מתי:

$$f(x) = f(x + T)$$

דוגמא:

מהו המחזור של הפונקציה $cos(4x + 2)$?

פתרון: נכתוב את המשוואה המתאימה:

$$\cos(4x + 2) = \cos(4(x + T) + 2)$$

$$\cos(4x + 2) = \cos(4x + 2 + 4T)$$

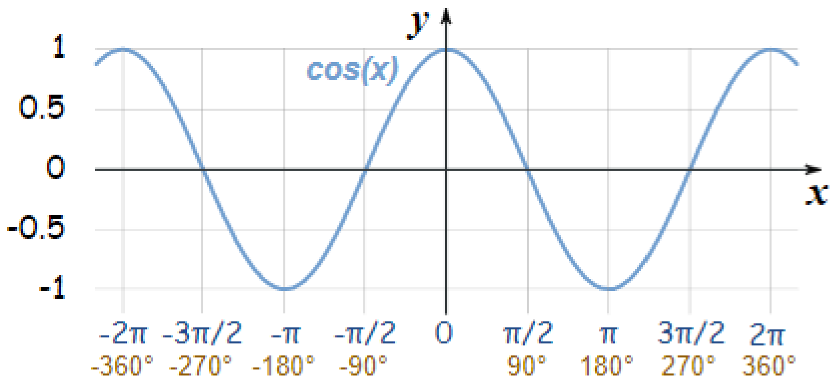
$$4T = 2\pi$$

$$\boldsymbol{T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}}$$

אם כן, **המחזור של הפונקציה** $\cos(4x)$ **הוא** $\boldsymbol{T = \frac{\pi}{2}}$.

6. סימטריה – תכונה חשובה בקורס (!)

נסתכל שוב על הגרף של הפונקציה:



כל "הר" בפונקציה, שנמצא מעל ציר X **שווה בגודלו** ל"הר" אחר, שנמצא מתחתיו.
למעשה, כל ה"הרים" שווים בגודלם.

בנוסף, כל נקודה בחלקו החיובי של ציר X סימטרית, כלומר, נמצאת בדיוק באותו המרחק בחלקו השלילי.
בעצם, **יש בפונקציה הרבה "מרחקים" שמעניינים אותנו.**
המרחק בין חומר הגלם, שנותן את שיא הגובה הראשון בצד החיובי, לבין ראשית הצירים = המרחק בין חומר הגלם, שנותן את שיא הגובה הראשון בצד החיובי, לבין נקודת ההתאפסות הראשונה.
דוגמאות לכך נראה בסרטון.

נגיד: "קיימת סימטריה ביחד לציר X וגם ביחס לציר y".

עכשיו כאן פונקציית COS - בהצלחה!

זהויות טריגונומטריות

<u>הסבר:</u>
בחלק זה יוצגו זהויות טריגונומטריות.

זהויות = משוואות

ישנן, בעיקרון, יותר זהויות. כאן אציג לכם **<u>אך ורק את הזהויות הנדרשות לכם לקורס</u>**.
את הזהויות כדאי להדפיס ולשמור אצלכם לצורך התרגול וההכנה לקורס.
<u>נתחיל:</u>

<u>זהות פיתגורס וגרסאותיה:</u>

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

<u>הגדרת פונקציית $tanx$:</u>

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

<u>הגדרת פונקציית $cotx$:</u>

$$\cot \mathrm{x} = \frac{\cos \mathrm{x}}{\sin \mathrm{x}}$$

<u>זהויות משולש ישר זווית:</u>

$$\mathrm{Sin}(90 - \mathrm{a}) = \mathrm{cosa}$$

$$\cos(90 - \mathrm{a}) = \mathrm{sina}$$

<u>זווית שלילית:</u>

$$\mathrm{Sin}(-\mathrm{a}) = -\mathrm{sina}$$

$$\cos(-\mathrm{a}) = \mathrm{cosa}$$

$$\tan(-\mathrm{a}) = -\mathrm{tana}$$

זווית משלימה ל- 180 מעלות :

$$\mathrm{Sin}(180-a)=\mathrm{sina}$$
$$\cos(180-a)=-\mathrm{cosa}$$
$$\tan(180-a)=-\mathrm{tana}$$

זווית כפולה :

$$\mathrm{Sin}(2a)=2\mathrm{sinacosa}$$
$$\cos(2a)=\cos^2 x-\sin^2 x$$
$$\cos(2a)=2\cos^2 x-1$$
$$\cos(2a)=1-2\sin^2 x$$

פתרונות מיוחדים של $sinx$:

$$Sin\left(\frac{\pi}{2}\pm 2\pi\cdot k\right)=1$$
$$Sin\,(\pm\pi\cdot k)=0$$
$$Sin\left(-\frac{\pi}{2}\pm 2\pi\cdot k\right)=-1$$

כאשר k הוא : $0,1,2,3\ldots n$

פתרונות מיוחדים של $cosx$:

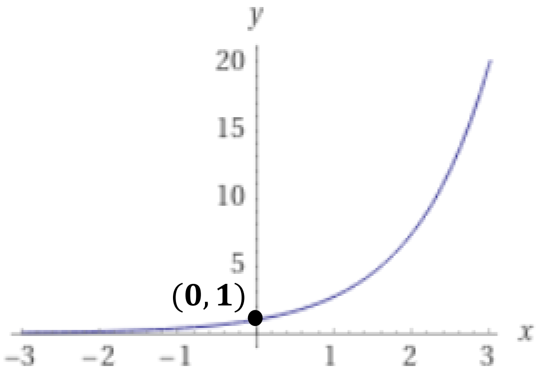
$$cos\,(\pm 2\pi\cdot k)=1$$
$$cos\left(\frac{\pi}{2}\pm\pi\cdot k\right)=0$$
$$cos\,(\pi\pm 2\pi\cdot k)=-1$$

כאשר k הוא : $0,1,2,3\ldots n$

עד כאן זהויות טריגונומטריות

עכשיו לתרגול - בהצלחה!

פונקציה e^x



תחום הגדרה:

כל איקס שתרצו. כל X.

חיתוך עם ציר y:

בגובה 1. בנקודה (0,1).

חיוביות:

הפונקציה תמיד חיובית.
תמיד נותנת תוצאות גדולות יותר מ-0.

גבולות אינסוף/מינוס אינסוף:

$$\lim_{x\to\infty} e^x = e^{\infty} = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = e^{(-\infty)} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = \mathbf{0}$$

רציפות:

הפונקציה רציפה תמיד. לכל x שתרצו.

גזירות ישירה + גזירות של הרכבה:

$$(e^x)' = e^x$$

$$(e^{x^2+3sinx})' = e^{x^2+3sinx} \cdot (2x + 3cosx)$$

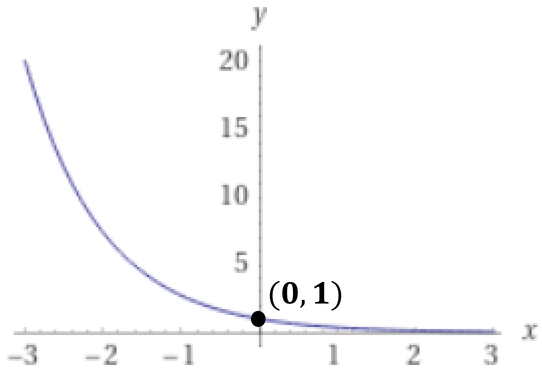
מונוטוניות:

הפונקציה מונוטונית עולה לכל x. תמיד תמיד עולה.

אינטגרל:

$$\int e^x\,dx = e^x + C \quad , \quad \int e^{2x}\,dx = \frac{e^{2x}}{2} + D$$

פונקציה e^{-x}



תחום הגדרה:

כל איקס שתרצו. כל X.

חיתוך עם ציר y:

בגובה 1. בנקודה $(0,1)$.

חיוביות:

הפונקציה תמיד חיובית. כלומר תמיד נותנת תוצאות גדולות יותר מ- 0.

גבולות אינסוף/מינוס אינסוף:

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = \mathbf{0}$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = e^{-(-\infty)} = e^{\infty} = \infty$$

רציפות:

הפונקציה רציפה תמיד. לכל x שתרצו.

גזירות ישירה:

$$(e^{-x})' = e^{-x} \cdot (-1) = -e^{-x}$$

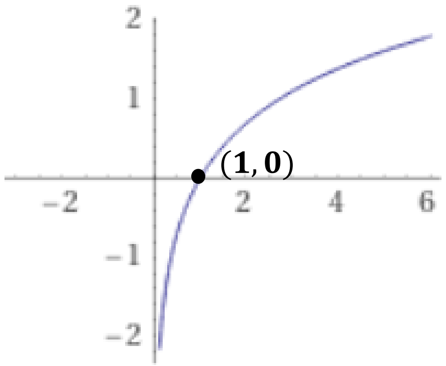
מונוטוניות:

הפונקציה מונוטונית יורדת לכל x. תמיד תמיד יורדת.

אינטגרל:

$$\int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + C \quad , \quad \int e^{-3x}\,dx = \frac{e^{-3x}}{-3} + D$$

פונקציה lnx



תחום הגדרה:

איקסים חיוביים. כל $x > 0$.

חיתוך עם ציר x:

בנקודה $(1,0)$.

חיתוך עם ציר y:

אין.

גבול באינסוף/גבול ב- 0^+:

$$\lim_{x\to\infty} lnx = \ln(\infty) = \infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} lnx = \ln(0^+) = -\infty$$

רציפות:

הפונקציה רציפה לכל $x > 0$.

גזירות ישירה/גזירה של הרכבה: לא שוכחים להכפיל בנגזרת פנימית.

$$(lnx)' = \frac{1}{x}\cdot 1 = \frac{1}{x}$$

$$(\ln(x^2 + sinx))' = \frac{1}{x^2 + sinx}\cdot(2x + cosx)$$

מונוטוניות (לאט):

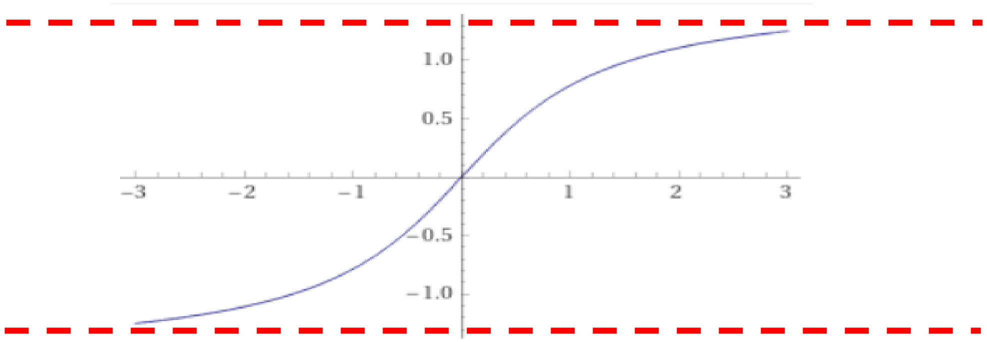
הפונקציה מונוטונית עולה לכל $x > 0$. תמיד תמיד עולה. אבל היא עולה לאט...

אינטגרל – לא יודעים(!) -> עושים אינטגרציה בחלקים:

$$\int \frac{1}{x}dx = lnx + D \quad , \int lnxdx = \int 1\cdot lnxdx = xlnx - x + C$$

מפעילים נוסחא אינטגרציה בחלקים

פונקציה $arctanx$



$y=\frac{\pi}{2}$

$y=-\frac{\pi}{2}$

תחום הגדרה:

כל איקס שתרצו. כל X.

נקודת חיתוך יחידה עם הצירים:

בנקודה $(0,0)$.

נקודות חשובות:

הנקודות $(1,\frac{\pi}{4})$, $(-1,-\frac{\pi}{4})$.

גבולות באינסוף/מינוס אינסוף (אסימפטוטות אופקיות):

$$\lim_{x\to -\infty} arctanx=\arctan(-\infty)=-\frac{\pi}{2} \quad \to \quad \boldsymbol{y=-\frac{\pi}{2}} \quad , \quad \lim_{x\to \infty} arctanx=\arctan(\infty)=\frac{\pi}{2} \quad \to \quad \boldsymbol{y=\frac{\pi}{2}}$$

רציפות:

הפונקציה רציפה תמיד. לכל x שתרצו.

גזירות ישירה/גזירה של הרכבה:

$$\arctan(3x)'=\frac{1}{(3x)^2+1}\cdot 3=\frac{3}{9x^2+1} \quad , \quad arctanx'=\frac{1}{x^2+1}$$

מונוטוניות:

הפונקציה מונוטונית עולה לכל x. תמיד תמיד עולה.

סימן x כסימן $arctanx$: אם נכניס מספר חיובי – נקבל תשובה חיובית. אם נכניס מספר שלילי – נקבל תשובה שלילית -> $\arctan(+)>0 \ , \ \arctan(-)<0$

אינטגרל – לא יודעים(!) -> עושים אינטגרציה בחלקים:

$$\int arctanxdx=\int 1\cdot arctanxdx=xarctanx-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+K$$

שתי נוסחאות של אינטגרל שמוביל לפונקציה:

$$\int \frac{1}{x^2+1}dx=arctanx+C \quad , \quad \int \frac{1}{x^2+a^2}dx=\frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a})+D$$

זוגיות/אי זוגיות של פונקציה

פונקציה אי זוגית

פונקציה אי זוגית היא פונקציה המקיימת את המשוואה הבאה:

$$\boxed{f(x) = -f(-x)}$$

לדוגמא:

נתונה הפונקציה: $f(x) = |x| \cdot sinx$.
בדקו האם הפונקציה אי זוגית.

שלבים לפתרון:

1. פונקציה אי זוגית צריכה לקיים את המשוואה: $f(x) = -f(-x)$.
אנו רואים שצד שמאל הוא הפונקציה עצמה ולכן נכתוב קודם כל: (העתקנו את הפונקציה הנתונה)
$$|x| \cdot sinx =$$
שימו לב שאת אגף ימין כרגע לא כתבנו.

2. באגף ימין – נציב בכל מקום שכתוב x את $-x$.
נקבל:
$$|x| \cdot sinx = |-x| \cdot sin(-x)$$

3. נסדר...
$$|x| \cdot sinx = -|x| \cdot sin(x)$$

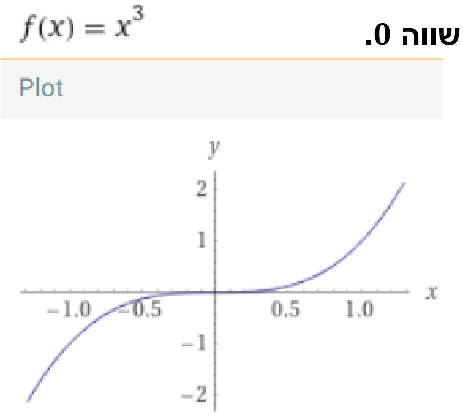
השתמשו בשתי עובדות:
א. $|-x| = |x|$ (ערך מוחלט הופך כל מספר שלילי לחיובי)
ב. $\sin(-x) = -sinx$ (זו זהות טריגונומטרית – המינוס יוצא החוצה)

4. קיבלנו במדויק ש: $f(x) = -f(-x)$ כי קיבלנו את אותו הביטוי בשני האגפים עם סימן מנוגד.
5. הוכחנו שהפונקציה אי זוגית.

משפט מרכזי בנושא זה:

אינטגרל בקטע סימטרי (כלשהו) של פונקציה אי זוגית שווה 0.

$$\int_{-\pi}^{\pi} (|x| \cdot sinx)dx = 0$$



דוגמא קלאסית לפונקציה אי זוגית היא הפונקציה $f(x) = x^3$.

אם תציבו 4 ואז את -4 <-- תקבלו אותה תוצאה עם סימן מנוגד. (תעשו את זה...)

אם תציבו כל x ואז את $-x$ <-- תקבלו אותה תוצאה עם סימן מנוגד.

<u>פונקציה זוגית</u>

<u>פונקציה זוגית</u> היא פונקציה המקיימת את המשוואה הבאה:

$$\boxed{f(x) = f(-x)}$$

<u>לדוגמא:</u>

נתונה הפונקציה: $f(x) = x^2 \cdot cosx$.
בדקו האם הפונקציה <u>זוגית</u>.

<u>שלבים לפתרון:</u>

1. פונקציה זוגית צריכה לקיים את המשוואה: $f(x) = f(-x)$.
אנו רואים שצד שמאל הוא הפונקציה עצמה ולכן נכתוב קודם כל: (העתקנו את הפונקציה הנתונה)
$$x^2 \cdot cosx =$$
שימו לב שאת אגף ימין כרגע לא כתבנו.

2. באגף ימין – נציב בכל מקום שכתוב x את $-x$.
נקבל:
$$x^2 \cdot cosx = (-x)^2 \cdot cos(-x)$$

3. נסדר...
$$x^2 \cdot cosx = x^2 \cdot cos(x)$$

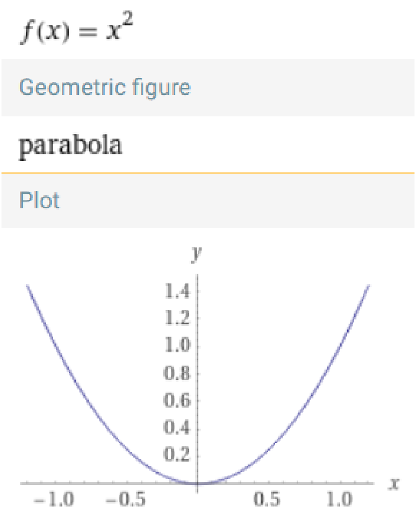
השתמשו בשתי עובדות:
ג. $(-x)^2 = x^2$ (בריבוע הופך מספר שלילי לחיובי)
ד. $\cos(-x) = cosx$ (זו זהות טריגונומטרית – המינוס נעלם)

4. קיבלנו במדויק ש: $f(x) = f(-x)$ כי קיבלנו את אותו הביטוי בשני האגפים.
5. הוכחנו שהפונקציה זוגית.

דוגמא קלאסית לפונקציה זוגית היא הפרבולה $f(x) = x^2$.

אם תציבו 4 ואז את -4 –> תקבלו אותה תוצאה. (תעשו את זה...)

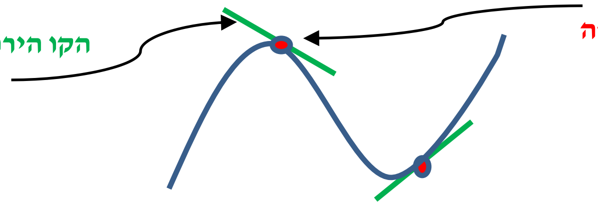
אם תציבו כל x ואז את $-x$ –> תקבלו אותה תוצאה.



נושא - נגזרת

הקדמה:

מה היא פונקציית הנגזרת? נגזרת היא פונקציה חדשה אשר נובעת מהפונקציה המקורית שלנו ע"י ביצוע פעולת הגזירה.
השם "נגזרת" בא לציין בדיוק את זה - שהיא "נגזרת" מהפונקציה המקורית.
הנגזרת היא מאין תעודת זהות של הפונקציה המקורית ובעזרתה נוכל ללמוד הרבה על התנהגות פונקציית המקור.
אחד השימושים המרכזיים בנגזרת הוא מציאת השיפוע של המשיק לגרף הפונקציה כפי שרואים באיור הבא:



- **משיק -** ישר העובר דרך נקודה כלשהי על הפונקציה והכיוון שלו יהיה זהה לכיוון הפונקציה באותה הנקודה.
המשיק הוא קו ישר ה"נושק" לפונקציה בנקודה. מכיוון שהמשיק הוא קו ישר אז יש לו שיפוע מוגדר.
באמצעות הנגזרת ניתן לחשב את השיפוע של המשיק לפונקציה בכל נקודה על הפונקציה המקורית.

- **נקודת השקה -** נקודה על הפונקציה בה עובר המשיק והיא משותפת לפונקציה וגם למשיק.

- **סימון:** אם את הפונקציה המקורית מסמנים ב- $f(x)$ אז את הנגזרת של הפונקציה מסמנים עם ׳- $f'(x)$.

ישנם כמה סוגים של נגזרות:

1. נגזרת של מספר
2. נגזרת של קו ישר
3. נגזרת המשלבת x ומספר
4. נגזרת של פולינום
5. נגזרת של מכפלת פונקציות
6. נגזרת של מנת פונקציות
7. נגזרת מורכבת
8. נגזרת עם פרמטר
9. נגזרת פונקציית שורש
10. נגזרת פונקציה טריגונומטרית
11. נגזרת פונקציה מעריכית
12. נגזרת פונקציה לוגריתמית

נדגים כל נגזרת:

1. **נגזרת של מספר -** נגזרת של מספר היא 0.

דוגמא: $f(x) = 3$ אז הנגזרת $f'(x) = 0$

---

2. **נגזרת של קו ישר -** נגזרת של קו ישר היא המספר שנמצא לפני ה- x.

דוגמא: $f(x) = -4x$ אז הנגזרת $f'(x) = -4$

---

3. **נגזרת המשלבת x ומספר -** אם בפונקציה יש שילוב של x ומספר, נגזור כל אחד מהם **בנפרד**.

דוגמא: נתון הישר $f(x) = 3x + 2$ נגזור כל חלק בנפרד - הנגזרת של $3x$ היא 3 והנגזרת של $+2$ היא 0.

לכן הנגזרת כולה היא $f'(x) = 3 + 0 = 3$ כלומר $f'(x) = 3$

---

4. **נגזרת של פולינום -** כלל הבסיס בגזירת פונקציית פולינום אומר כך:

אם הפונקציה הנתונה היא $f(x) = x^n$ אז הנגזרת היא $f'(x) = nx^{n-1}$

נראה דוגמאות:

נתון הפולינום $f(x) = x^4$ אז הנגזרת שלו היא $f'(x) = 4x^3$.

נתון הפולינום $f(x) = x^6 + 5$ אז הנגזרת שלו היא $f'(x) = 6x^5 + 0$ כלומר $f'(x) = 6x^5$.

נתון הפולינום $f(x) = 5x^3$ אז הנגזרת שלו היא $f'(x) = 5 \cdot 3x^2 = 15x^2$.

---

5. **נגזרת של מכפלת פונקציות -** כאשר נתונה לנו פונקציה $A(x)$ שהיא מכפלה של שתי פונקציות.

$$\boldsymbol{A(x) = f(x) \cdot g(x)}$$

אז הנגזרת של מכפלת הפונקציות תראה כך:

$$\boldsymbol{A'(x) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)}$$

דוגמא: $A'(x) = [4x(x^3 + 1)]' = 4(x^3 + 1) + 3x^2 \cdot 4x$

---

6. **נגזרת של מנת פונקציות -** במידה ונתונות שתי פונקציות שהקשר ביניהן הוא קשר של חילוק

אז הנגזרת של מנת הפונקציה תראה כך $$\boldsymbol{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{[g(x)]^2}}$$

(נגזרת מנה שווה לנגזרת המונה ($f'(x)$) **כפול** פונקציית המכנה ($g(x)$) **פחות** נגזרת המכנה ($g'(x)$) **כפול** פונקציית המונה ($f(x)$) וכל זה **חלקי** פונקציית המכנה בריבוע ($[g(x)]^2$).

דוגמא: $f(x) = \frac{4x+2}{x^3} = f'(x) = \frac{4 \cdot x^3 - 3x^2(4x+2)}{(x^3)^2}$

7. נגזרת מורכבת - פונקציה מורכבת היא פונקציה המכילה 2 פונקציות. גם הנגזרת שלה תכיל 2 פונקציות.

נגזור פונקציה מורכבת לפי הכלל הבא: $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ **(גוזרים מבחוץ פנימה)**

דוגמא: נתונה הפונקציה $f(x) = (3-4x)^5$ והנגזרת שלה היא $f'(x) = 5(3-4x)^4 \cdot (-4)$

---

8. נגזרת עם פרמטר - פרמטר הוא בעצם מספר ואנחנו מתייחסים אליו כמספר.

נתונה הפונקציה $f(x) = ax$ אז הנגזרת שלה היא $f'(x) = a$.

דוגמא: נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3$ והנגזרת שלה $f'(x) = 3 \cdot ax^2$

---

9. נגזרת פונקציית שורש - יש 2 נוסחאות לגזירה של שורש: פונקציית שורש פשוטה ומורכבת.

פשוטה: $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ומורכבת: $(\sqrt{f(x)})' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x)$

דוגמא לפונקציית שורש פשוטה: נתונה הפונקציה $f(x) = 4\sqrt{x}$ והנגזרת שלה היא

$$f'(x) = 4 \cdot (\sqrt{x})' = 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{4}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

דוגמא לפונקציית שורש מורכבת: נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{4x}$ והנגזרת שלה היא

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4x}} \cdot 4 = \frac{4}{2\sqrt{4x}} = \frac{2}{\sqrt{4x}}$$

---

10. נגזרת פונקציה טריגונומטרית – נוסחאות:

- נתונה הפונקציה $f(x) = sinx$ והנגזרת שלה היא $f'(x) = cosx$
- נתונה הפונקציה $f(x) = cosx$ והנגזרת שלה היא $f'(x) = -sinx$
- נתונה הפונקציה $f(x) = -sinx$ והנגזרת שלה היא $f'(x) = -cosx$
- נתונה הפונקציה $f(x) = -cosx$ והנגזרת שלה היא $f'(x) = sinx$
- נתונה הפונקציה $f(x) = tanx$ והנגזרת שלה היא $f'(x) = \frac{1}{cos^2x}$

לדוגמא: נתונה הפונקציה $f(x) = 3sinx$ והנגזרת שלה היא $f'(x) = 3cosx$

לדוגמא: נתונה הפונקציה $f(x) = 5cosx$ והנגזרת שלה היא $f'(x) = -5sinx$

עוד דוגמא: נתונה הפונקציה $f(x) = 3x \cdot sinx$ והנגזרת שלה היא $f'(x) = 3 \cdot sinx + 3x \cdot cosx$

(לפי הנוסחה של נגזרת מכפלה: $A'(x) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$)

---

11. נגזרת פונקציה מעריכית - במקרה של e^x הנגזרת של הפונקציה שווה לפונקציה עצמה $f'(x) = e^x$.

דוגמא: נתונה הפונקציה- $f(x) = e^x$ והנגזרת שלה היא $f'(x) = e^x$

עוד דוגמא: נתונה הפונקציה $f(x) = e^x + 3x - 4$ והנגזרת שלה היא $f'(x) = e^x + 3$

---

12. נגזרת פונקציה לוגריתמית - נגזרת של פונקציית lnx **פשוטה** היא $\frac{1}{x}$.

נגזרת של $ln(f(x))$ **מורכבת** היא $\boldsymbol{\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)}$.

דוגמא: נתונה הפונקציה $f(x) = 5lnx$ והנגזרת שלה $f'(x) = 5 \cdot \frac{1}{x} = \frac{5}{x}$

עוד דוגמא: נתונה הפונקציה $f(x) = ln(x^3)$ והנגזרת שלה $f'(x) = \frac{1}{x^3} \cdot 3x^2 = \frac{3}{x}$

ועוד דוגמא: נתונה הפונקציה $f(x) = ln(-4x^2 - 5)$

והנגזרת שלה היא: $f'(x) = \frac{1}{-4x^2-5} \cdot (-8x) = \frac{8x}{4x^2+5}$

סיכום כללי הנגזרות

כללים בסיסיים
נגזרת של קבוע: $C' = 0$
נגזרת של משתנה: $x' = 1$, $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{1}{(f(x))^2} \cdot f'(x)$, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
נגזרת של מכפלת קבוע במשתנה: $(cx)' = c$
נגזרת עם חיסור/חיבור בין פונקציות: $(f(x) \pm h(x))' = f'(x) \pm h'(x)$
נגזרת עם כפל בין פונקציות: $(f(x) \cdot h(x))' = f'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot h'(x)$
נגזרת של מנה בין פונקציות: $(\frac{f(x)}{h(x)})' = \frac{f'(x) \cdot h(x) - f(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$
נגזרת של פונקציה עם חזקות ושורשים
נגזרת של חזקה: $(x^n)' = nx^{n-1}$
נגזרת של פונקציית שורש פשוטה: $\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
נגזרת של פונקציית שורש מורכבת: $(\sqrt{f(x)})' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x)$
נגזרת של מכפלת קבוע במשתנה עם חזקה: $((A(x))^n)' = n \cdot (A(x))^{n-1} \cdot A'(x)$
נגזרות של פונקציות טריגונומטריות
נגזרת של sinx: $(sinx)' = cosx$
נגזרת של cosx: $(cosx)' = -sinx$
נגזרת של -sinx: $(-sinx) = -cosx$
נגזרת של -cosx: $(-cosx)' = sinx$
נגזרת של tanx: $(tanx)' = \frac{1}{cos^2x}$
נגזרת של sin עם פונקציה: $(sin(f(x))' = \cos(f(x)) \cdot f'(x)$
נגזרת של cos עם פונקציה: $(\cos(f(x)) = -\sin(f(x)) \cdot f'(x)$
נגזרת של tan עם פונקציה: $(\tan(f(x)) = \frac{1}{cos^2 f(x)} \cdot f'(x)$
נגזרות של פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות
נגזרת של e^x: $(e^x)' = e^x$
נגזרת של e^x עם פונקציה: $(e^{f(x)})' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$
נגזרת של ln: $(lnx)' = \frac{1}{x}$
נגזרת של ln עם פונקציה: $(\ln(f(x)))' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$

אסימפטוטות

מציאת אסימפטוטה אופקית של פונקציה:

מחשבים שני גבולות לפונקציה:

1. גבול לפונקציה **באינסוף.**
2. גבול לפונקציה **במינוס אינסוף.**

תשובות אפשריות בכל אחד מהגבולות:

- אם מקבלים תשובה שהיא **מספר סופי** - נגיד **שיש אסימפטוטה אופקית והיא: המספר שקיבלנו** $= y$.
- אם מקבלים כתוצאה **אינסוף או מינוס אינסוף** - נגיד **שאין אסימפטוטה אופקית.**

מציאת אסימפטוטה אנכית של פונקציה:

קודם כל, החשודות להיות אסימפטוטות אנכיות הן כל נקודות אי הרציפות של הפונקציה.

מבנה אסימפטוטה אנכית הוא **מספר** $= x$.

1. ניקח את נקודות אי הרציפות **ונחשב אליהן גבול.**
   (לדוגמא אם $x = 3$ היא נקודת אי רציפות אז נבדוק גבול בשאיפה ל-3.)
   במקרה כזה, לרוב נצטרך לפצל לגבולות חד צדדיים.
2. אם משני הצדדים **קיבלנו מספר קבוע סופי** - נגיד **שהישר** $x = 3$ **אינו אסימפטוטה.**
3. אם, באחד הצדדים, קיבלנו **אינסוף או מינוס אינסוף** - נגיד **שהישר** $x = 3$ **הוא כן אסימפטוטה אנכית.**

סיכום אינטגרלים

פונקציה קדומה

הגדרה: הפונקציה $\mathrm{F}(X)$ נקראת פונקציה קדומה לפונקציה הנתונה $f(x)$, אם $\mathrm{F}'(X) = f(x)$ לכל x המוגדר בתחום של $f(x)$. מקור השם פונקציה קדומה בא מכך שהפונקציה $f(x)$ מתקבלת מגזירה של- $F(X)$ ומשתמע מכך ש $F(X)$ קודמת ל- $f(x)$.

כלל: אם $F(X)$ היא פונקציה קדומה של $f(x)$ אז כל פונקציה מהצורה $F(X) + C$ היא פונקציה קדומה שלה.

תהליך מציאת הפונקציה הקדומה נקרא **אינטגרציה**. אוסף כל הפונקציות הקדומות של $f(x)$ נקרא **אינטגרל בלתי מסוים** ומסומן ב- $\int f(x)dx$.

כללי אינטגרציה בסיסיים

האינטגרל הוא ביצוע של פעולה הפוכה לגזירה, עבור כללי הגזירה הבסיסיים יש כללי אינטגרציה מתאימים.

להלן מספר אינטגרלים והפונקציה הקדומה המתאימה להם.

חובה להכיר אותם טוב טוב מאחר והם התשתית לנושא האינטגרלים.

הפרמטר C לא חייב להיות זהה בכל נוסחה וניתן להחליף בקבוע D, K או כל אות אחרת.

פונקציה קדומה	אינטגרל
$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$	$\int x^n dx =$
$-cosx+C$	$\int sinxdx =$
$sinx+C$	$\int cosxdx =$
$cosx+C$	$\int -sinxdx =$
$-sinx+C$	$\int -cosxdx =$
$ax+C$	$\int adx =$
e^x+C	$\int e^x dx =$
$-e^{-x}+C$	$\int e^{-x} dx =$
$ln\|x\|+C$	$\int \frac{1}{x} dx =$
$arctanx+C$	$\int \frac{1}{x^2+1} dx =$
$\frac{1}{a} arctan\left(\frac{x}{a}\right)+C$	$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx =$

שיטת ההצבה

שיטה זו היא פעולה של הצבת משתנה אחר במקום ביטוי כלשהו שנתון שלא ניתן לבצע חישוב באופן ישיר- לדוגמא $\int(4x+3)^5dx$. חישוב ישיר של אינטגרל זה מצריך פתיחה של החזקה, פעולה לא פשוטה כלל ולפעמים גם לא אפשרית.

4 שלבי עבודה לפי שיטת ההצבה:

1. **בחירת ההצבה** - לפי הגיון וניסיון. לפי הדוגמא למעלה, ההצבה המתקבלת היא - $t=4x+3$
2. **חישוב הדיפרנציאל** - נגזור את משוואת ההצבה כאילו מוגדרת פונקציה $t(x)$ ונקבל $dt=4dx$.
3. **ביצוע ההצבה** - נחליף את האינטגרל המקורי באינטגרל חדש במונחי t ו- dt-

$$\int(4x+3)^5dx=\int t^5dx=\int t^5\frac{dt}{4}=\frac{1}{4}\int t^5dt$$

4. **חישוב האינטגרל** - נחשב את האינטגרל שהתקבל במשתנה החדש ולאחר מכן נחזור למשתנה המקורי-

$$\frac{1}{4}t^5dt=\frac{1}{4}*\frac{t^6}{6}=\frac{t^6}{24}=\frac{(4x+3)^6}{24}$$

אינטגרציה ב- 2 חלקים

כלל אינטגרציה בחלקים נועד למכפלת פונקציות.

נוסחת האינטגרציה בחלקים: $\int u'vdx=uv-\int uv'dx$

ההחלטה איך לבחור איזו פונקציה תוגדר כ- v ואיזו תוגדר כנגזרת u' תתקבל לרוב לאחר ניסוי ובדיקה.

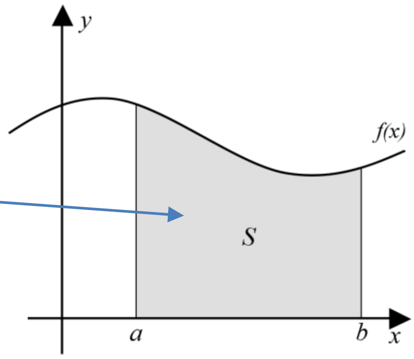
פירוט ייכתב כאן בעתיד הקרוב.

האינטגרל המסוים

נתונה הפונקציה f והאינטגרל עבורה מסומן כך- $\int_a^b f(x)dx$

האינטגרל המסוים הזה מתאר את השטח הכלוא מתחת לגרף הפונקציה נתונה ומעל ציר ה- x בקטע $[a,b]$.

$\int_a^b f(x)dx$ - **זה השטח הכלוא בקטע** $[a,b]$.



הגדרת האינטגרל המסוים היא שטח נטו בין הפונקציה לציר x.

השטח הוא: $$S = \int_a^b (\text{פונקציה עליונה} - \text{פונקציה תחתונה})dx$$

מחשבים את האינטגרל ומקבלים את הקדומה F.

לאחר מכן עוברים למשפט היסודי הראשון:

המשפט היסודי הראשון

הכלי הבסיסי לחישוב אינטגרלים מסויימים (שטח אצלנו בקורס). להלן המשפט:

אם f רציפה ו- F קדומה של f בקטע $[a,b]$ אז $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

ממשפט זה אנו מבינים כי ניתן למצוא, בשלב ראשון, את הפונקציה הקדומה לפונקציה f, היא הפונקציה F,

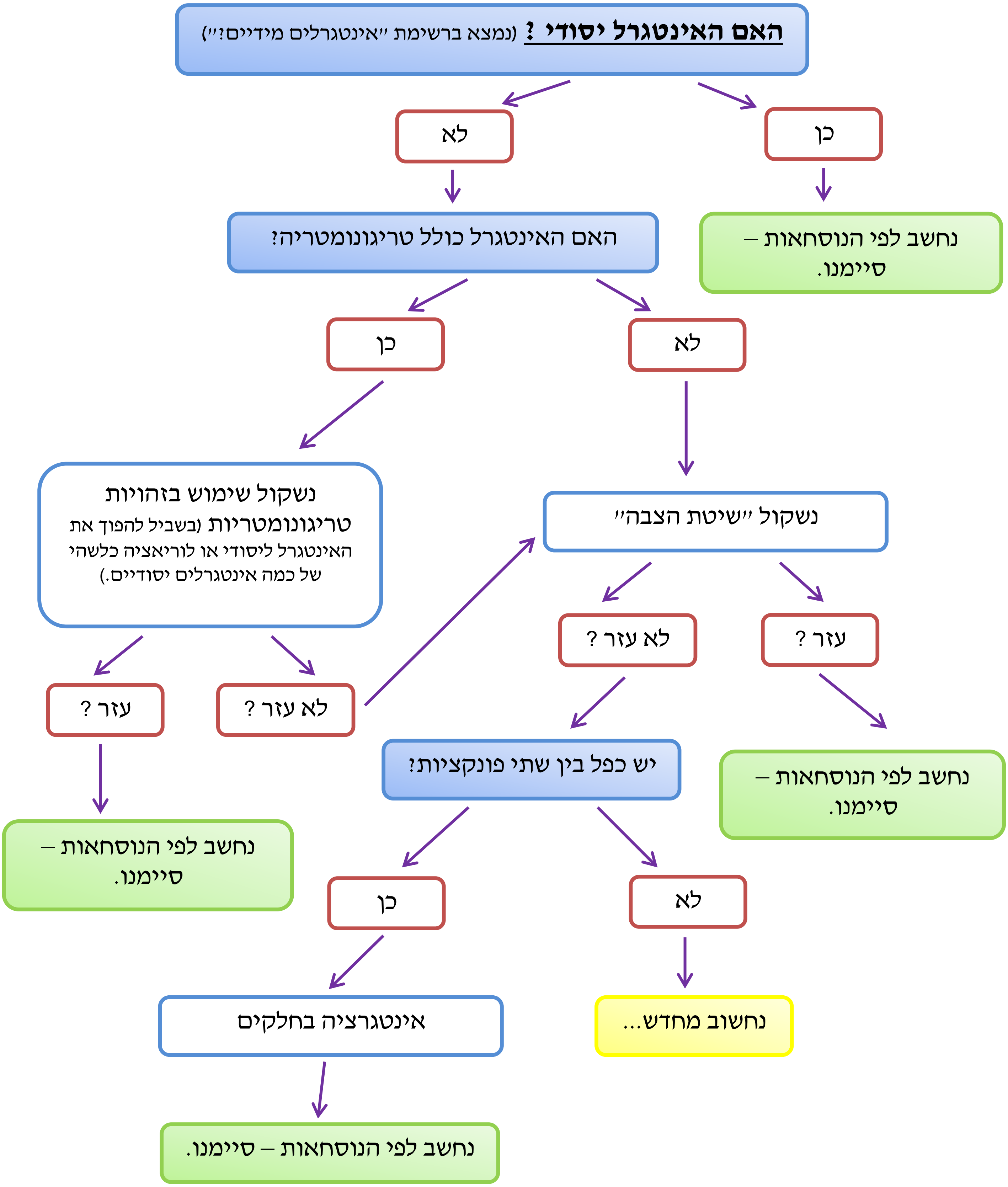
ולהציב בה את ערכי הקצה של הקטע הנתון. (קודם את b ואז את a).

נבצע **חיסור** בין שני הערכים הללו ונקבל את **השטח** המבוקש.

שימו לב טוב – קיבלנו את השטח רק מכיוון שהפונקציה $f(x)$ אכן תוחמת את השטח מלמעלה

וגם $y = 0$ היא הפונקציה התחתונה. (ציר x)

אלגוריתם לפתרון אינטגרל



מהו טור:

עד עכשיו דיברנו על סדרות. כל איבר בסדרה עמד בפני עצמו. (היה פסיק בין האיברים)
כעת נדבר על:

טור = סכום האיברים של הסדרה

על מנת להציג טור נשתמש בסימן המתמטי **סיגמא**.
נציג טור:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+= \text{(תשובה)}$$

זה טור שכיח. נלמד בהמשך.
נראה עוד דוגמאות:

$$\sum_{n=1}^{\infty}6=6+6+6+6+6+\cdots+= \text{(תשובה)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}2^n=2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+\cdots+=1+2+4+8+16+\cdots+= \text{(תשובה)}$$

<u>למה לומדים טורים? מה יעניין אותנו?</u>

בנושא טורים השאלה הנשאלת היא:
<u>**מה ניתן להגיד על סכום הטור? (מהו הסכום באינסוף?)**</u>
לפנינו 2 מצבים:

אם לטור סכום סופי = נגיד "הטור מתכנס"
אם לטור סכום אינסופי = נגיד "הטור מתבדר"

<u>**הערה חשובה:**</u>
ההסתכלות על נושא זה דומה להסתכלות שבנושאים גבולות ואינטגרלים מוכללים.
<u>**אנחנו מסתכלים על ההתנהגות באינסוף(!)**</u> ולכן - כל הטקטיקות לפתרון בהתאם.

נראה דוגמא לטור מתכנס:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+=1$$

נגיד – הטור שלפנינו מתכנס וערכו (של הסכום) הוא **1**.

אם כך, בהינתן טור $\sum a_n$ כיצד נקבע אם הוא מתכנס או מתבדר?
נקבע זאת על פי **מבחני ההתכנסות.**

חלוקת הטורים ל-3 סוגים שונים
תמונת על

טורים חיוביים – 70%	טורים מחליפי סימן – 15%	טורים לא זה ולא זה – 15%
טור גיאומטרי טור הרמוני p מבחן המנה להתכנסות מבחן ההשוואה מבחן ההשוואה הגבולי	מבחן לייבניץ הרמוני p מחליף סימן	Sin(n) Cos(n) בדיקת התכנסות בהחלט/בתנאי ע״י בדיקת טור הערכים המוחלטים או ע״י מבחן המנה להתכנסות בהחלט

כלים נוספים, רוחביים, שנשתמש בהם לבדיקות שונות:

1. תנאי הכרחי להתכנסות
2. אריתמטיקה של טורים + משפט נוסף

תנאי הכרחי להתכנסות

נתון טור חיובי $\sum a_n$.
נבדוק את התנאי מטה על מנת לגלות **האם קיים פוטנציאל להתכנסות הטור**.

1. הבדיקה היא :

$$\lim_{n\to\infty} (a_n) = 0$$

אם **ערך הגבול** $= \mathbf{0}$ אזי יש סיכוי שהטור **יתכנס (!)** .

אם **ערך הגבול** $\neq \mathbf{0}$ אזי בוודאות הטור **מתבדר (!)** .

הסבר :
בדיקת התנאי ההכרחי להתכנסות היא, בעצם, **בדיקת היתכנות להתכנסות**.
זו בדיקה ראשונית. במידה והתנאי לא מתקיים, אין תרגיל. כלומר, נכריז שהטור מתבדר ונעבור לתרגיל הבא.
במילים אחרות, הבדיקה עונה על השאלות הנרדפות הבאות :

א. "האם יש סיכוי שהטור שלפנינו יתכנס?"
ב. "האם יש טעם בכלל להתחיל לבדוק את מבחני ההתכנסות?"

הערה חשובה :
זהו תנאי הכרחי אך **לא מספיק(!)**

2. תרגיל לדוגמא :

נתון הטור $\sum \frac{1}{n}$. האם הטור מתכנס או מתבדר?

נבדוק "תנאי הכרחי להתכנסות" :

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

התנאי אכן מתקיים. יש פוטנציאל להתכנסות **אבל (!)** הטור הזה **מתבדר**. (כפי שנראה בהמשך)

3. תרגיל נוסף לדוגמא :
נתון הטור $\sum \frac{4n+8}{6n+3}$. האם הטור מתכנס או מתבדר?

נבדוק "תנאי הכרחי להתכנסות" :

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n+8}{6n+3}\right) = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{6}}$$

התנאי לא מתקיים **(!)**.
מסקנה : הטור **מתבדר**.

טור גיאומטרי

1. זיהוי ויזואלי:

$$(\text{מספר})^{\text{משתנה}}$$

כך זה ייראה:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

2. הבדיקה שנבצע:

אם $-1 < q < 1$ אז הטור **מתכנס (!)**.

אחרת - הטור **מתבדר (!)**.

3. עובדות חשובות על הטור:

- בטור גיאומטרי - **תמיד נדע אם מתכנס או מתבדר.**
- בטור גיאומטרי - **תמיד נדע את סכומו.**
- נוסחת הסכום של טור גיאומטרי (כאשר n מתחיל מ-0):

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

4. תרגיל לדוגמא:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{4})^n$$

קיבלנו ש- $q = \frac{1}{4}$. כלומר $-1 < q < 1$. כלומר הטור שלפנינו מתכנס **(!)**.

סכומו:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{4})^n = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \mathbf{\frac{4}{3}}$$

טור הרמוני p

1. זיהוי ויזואלי:

$$\frac{\text{מספר}}{(\text{משתנה})^{\text{מספר}}}$$

כך זה ייראה:

$$\sum \frac{1}{n^p}$$

2. הבדיקה שנבצע:

אם $\mathbf{1 < p}$ אז הטור **מתכנס** (!) .

אם $\mathbf{1 \geq p}$ אז הטור **מתבדר** (!) .

3. עובדה חשובה על הטור:

- בטור הרמוני P - **תמיד נדע אם מתכנס או מתבדר**.

4. תרגיל לדוגמא:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{n}}{n^4} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}^{\mathbf{3.5}}}$$

קיבלנו ש- $p = 3.5$. כלומר $p > 1$. כלומר הטור שלפנינו מתכנס (!) .

אריתמטיקה של טורים ומשפט נוסף

אם $\sum a_n$ **מתכנס** וגם $\sum b_n$ **מתכנס** אזי:

טור הסכום: $\boxed{\sum(a_n+b_n)}$, טור ההפרש: $\boxed{\sum(a_n-b_n)}$, טור כפל בקבוע: $\boxed{\sum(C\cdot a_n)}$

הם טורים מתכנסים (!)

הערה מרעידה: (כמו בשאר הנושאים)
מותר להשתמש במשפט האריתמטיקה רק במידה ובמצב ההתחלתי יש לפנינו שני טורים מתכנסים.
אחרת – אסור להשתמש במשפט. נחפש פתרון אחר.

תרגיל לדוגמא:

הוכיחו כי הטור $\sum \frac{3^n+5^n}{7^n}$ מתכנס.

פתרון:

$$\sum \frac{3^n+5^n}{7^n}=\sum\frac{3^n}{7^n}+\frac{5^n}{7^n}=\sum\left(\frac{3}{7}\right)^n+\left(\frac{5}{7}\right)^n$$

הטור $\sum\left(\frac{3}{7}\right)^n$ הוא טור גיאומטרי מתכנס כי $q=\frac{3}{7}$

הטור $\sum\left(\frac{5}{7}\right)^n$ הוא טור גיאומטרי מתכנס כי $q=\frac{5}{7}$

הטור $\sum\left(\frac{3}{7}\right)^n+\left(\frac{5}{7}\right)^n$ הוא טור הסכום של שני הטורים מעלה ולכן, לפי משפט אריתמטיקה הוא טור מתכנס.

משפט נוסף:

אם $\sum a_n$ **מתכנס** וגם $\sum b_n$ **מתבדר** אזי:

טור הסכום וההפרש: $\boxed{\sum a_n\pm b_n}$ הוא טורים **מתבדרים.**

הערות:

טור הסכום של שני טורים מתבדרים הוא טור מתבדר.

לא ניתן להגיד כלום על הפרש בין טורים מתבדרים. פשוט אין משפט כזה.

מבחן המנה להתכנסות

1. באילו מקרים נשתמש במבחן הזה:

א. במקרים רבים - כאשר המשתנה n יופיע בבסיס של גורם אחד וגם במעריך של גורם אחר.
ב. במקרים רבים – כאשר n יופיע במעריך של גורם כלשהו.
ג. במקרים רבים – כאשר n יופיע בתוך שורש.
ד. במקרים של עצרת (n!).

2. הבדיקה שנבצע:

הבדיקה היא חישוב הגבול הבא:

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$$

אם $\boxed{\rho < 1}$ <= התכנסות

אם $\boxed{\rho > 1}$ <= התבדרות

אם $\boxed{\rho = 1}$ <= לא ידוע. אין תשובה. המבחן לא מתאים. <u>נחפש מבחן אחר</u>.

3. תרגיל לדוגמה:

$$\sum n^3 \cdot 3^{-\frac{n}{2}} = \sum \frac{n^3}{3^{\frac{n}{2}}} \Rightarrow \sum a_n = \frac{n^3}{3^{\frac{n}{2}}}$$

$$\sum a_{n+1} = \frac{(n+1)^3}{3^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^3}{3^{\frac{n+1}{2}}}}{\frac{n^3}{3^{\frac{n}{2}}}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3 \cdot 3^{\frac{n}{2}}}{n^3 \cdot 3^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{3^{0.5}} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{3^{0.5}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$$

לכן הטור מתכנס על פי מבחן המנה.

<u>מבחן האינטגרל</u>

יהי $\sum a_n$ טור **<u>בעל איברים חיוביים</u>** ותהי $f(x)$ הפונקציה המתאימה לאחר החלפת n ב- x :

אז נבדוק :

אם : $f(x)$ יורדת ורציפה החל ממקום מסוים
אז : האינטגרל $\int_a^\infty f(x)dx$ והטור $\sum a_n$ מתכנסים/מתבדרים יחדיו.

<u>הערות חשובות :</u>

1. הפרמטר a הוא פרמטר חיובי.
2. במקרה של התכנסות – **לא נסיק מסקנה לגבי הערך אליו הטור מתכנס** אלא <u>רק</u> על עצם ההתכנסות.

<u>נראה דוגמא :</u>

ניקח את הטור הבא : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$

נהפוך את n ל- x ונקבל את הפונקציה המתאימה :

$f(x) = \frac{1}{x^3} \rightarrow$ הפונקציה $f(x)$ יורדת ורציפה ב- $(1,\infty)$

הקטע המתאים (לפי הטור שקיבלנו) הוא $(1,\infty)$.

נגדיר את האינטגרל : $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}dx$

זהו האינטגרל ההרמוני $p=3$ ולכן הוא מתכנס.

מכאן נובע, שהטור שקיבלנו, גם <u>מתכנס</u>.

(כי שניהם מתכנסים/מתבדרים יחד....)

ועוד דוגמא:

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

נבדוק את הטור:

הופכים לפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}$

f היא רציפה ויורדת בתחום $[1,\infty)$.

נגדיר אינטגרל מתאים ונבדוק אותו:

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$$

זה אינטגרל הרמוני $p=1$ מתבדר.

ולכן גם הטור מתבדר. ס"ו.

מבחן ההשוואה הקלאסי

נשתמש במשפט ההשוואה הקלאסי כאשר לפנינו יהיו שני טורים אי שליליים : $b_n \geq 0 \,, a_n \geq 0$

ואז, אם יחס סדר הגודל הוא : $\boxed{\sum a_n \leq \sum b_n}$

כלומר $\sum a_n$ הוא הטור הקטן מבין השניים ו- $\sum b_n$ הוא הטור הגדול מבניהם,
אז נדע ש :

אם $\sum b_n$ מתכנס אז **$\sum a_n$ מתכנס.**
אם $\sum a_n$ מתבדר אז **$\sum b_n$ מתבדר.**

תרגיל לדוגמא :

$$\sum \frac{n}{\sqrt{n^4+2n}} \geq \sum \frac{n}{\sqrt{n^4+2n^4}} = \sum \frac{n}{\sqrt{3n^4}}$$

$$= \sum \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{n}{n^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \underbrace{\sum \frac{1}{n}}_{\text{הרמוני } p=1 \text{ מתבדר!}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \infty = \underline{\underline{\infty}}$$

מתבדר...

הטור שלנו, המקורי, גדול יותר מטור מתבדר ולכן מתבדר בעצמו.

מבחן ההשוואה הגבולי

נתון טור $\mathbf{a_n} \geq \mathbf{0}$ טור נחקר. (זה הטור עליו נשאלנו)

יהי טור $\mathbf{b_n} \geq \mathbf{0}$ טור בוחן. (זה טור מוכר שאנחנו בוחרים בו – מהראש, ומשתמשים בו כבוחן)

לפי המבחן – נחשב את הגבול הבא:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

אם קיבלנו ש- $\rho > 0$ אזי הטורים שלנו הם טורים **מאותו "סוג"**, **מאותו "טיפוס"**, כלומר <u>מתכנסים</u> יחד או <u>מתבדרים</u> ביחד.

אם $\rho = 0$ אז: אם $\sum b_n$ מתכנס אז $\sum a_n$ מתכנס ואם $\sum a_n$ מתבדר אז $\sum b_n$ מתבדר (אבל ההיפך אינו נכון)

אם $\boldsymbol{\rho} = \infty$ אז: אם $\sum b_n$ מתבדר אז $\sum a_n$ מתבדר ואם $\sum a_n$ מתכנס אז $\sum b_n$ מתכנס (אבל ההיפך אינו נכון)

<u>תרגיל לדוגמא:</u>

הוכיחו כי $\sum \frac{1}{n+2}$ מתבדר.

הטור שלנו

$$a_n = \frac{1}{n+2} \quad , \quad b_n = \frac{1}{n} \leftarrow \text{טור הבוחן}$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} = \underline{\underline{1}}$$

$\rho = 1$! פשוט הטור המקורי וטור הבוחן הם מאותו הסוג.
טור הבוחן $\sum \frac{1}{n}$ מתבדר ולכן גם הטור $\sum \frac{1}{n+2}$ מתבדר!

טורים מחליפי סימן

עד עכשיו דיברנו על טורים **חיובים**.

כעת אנחנו מתחילים לדבר על טורים **מחליפי סימן**.

<u>הגדרה:</u>
טור מחליף סימן הוא טור שאיבריו הם לסירוגין + ו - (מינוס).

<u>דוגמאות:</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}=-1+1-1+1-1+1-1+\cdots$$

<u>הערה חשובה:</u> הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n)$ אינו מחליף סימן(!)
מכיוון שאין החלפת סימן...

$$sin(1)=0.84 \quad ,sin(2)=0.91 \quad ,sin(3)=0.14$$

<u>מבנה טור מחליף סימן:</u>

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}(-\mathbf{1})^{n}\cdot\frac{\mathbf{1}}{n}}$$

האיבר הכללי של הטור הוא $(-1)^n\cdot\frac{1}{n}$ והוא <u>מורכב משני חלקים</u>:

1. $(-\mathbf{1})^{n}$ - זה החלק האחראי על הסימן (בלבד!)
2. $\frac{\mathbf{1}}{n}$ - הוא החלק החיובי של האיבר הכללי.

לימוד מבחן לייבניץ – בעמוד הבא

מבחן לייבניץ

מבחן לייבניץ הוא מבחן שמציג **תנאי מספיק להתכנסות** של טור מחליף סימן.

בהינתן טור $\sum(-1)^n \cdot a_n$, מחליף סימן, נבדוק את התנאים הבאים:

1. $a_n > 0$ - (החלק החיובי שבאיבר הכללי חייב להיות חיובי – מובן מאליו. טרוויאלי)
2. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, כלומר a_n שואף ל-0 כאשר נבדוק התנהגות באינסוף.
3. **a_n היא סדרה יורדת החל ממקום מסוים** (בדרך הופכים לפונקציה, גוזרים, ומראים שהנגזרת שלילית ממקום מסוים).

במידה וכל שלושת התנאים מתקיימים(!)

נגיד שהטור $\sum(-1)^n \cdot a_n$ **מתכנס לפי מבחן לייבניץ**.

תרגיל לדוגמא:

$$\sum \frac{(-1)^n}{n+4} = \sum (-1)^n \cdot \underbrace{\frac{1}{n+4}}_{\text{החלק החיובי}}$$

1. $\frac{1}{n+4} > 0$. טריוויאלי כי n טבעי (חיובי).
2. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+4} = \underline{\underline{0}}$
3. $\underset{\text{מכנה גבוה יותר}}{\frac{1}{n+4}} > \underset{\text{מכנה קטן יותר}}{\frac{1}{n+5}}$ סדרה יורדת.

הטור $\sum(-1)^n \cdot \frac{1}{n+4}$ מתכנס לפי מבחן לייבניץ.

טור הרמוני p מחליף סימן

1. <u>זיהוי ויזואלי:</u>

$$\boxed{(-1)^n \cdot \frac{\text{מספר}}{(\text{משתנה})^{\text{מספר}}}}$$

כך זה ייראה:

$$\boxed{\sum (-1)^n \cdot \frac{1}{n^p}}$$

2. <u>הבדיקה שנבצע:</u>

אם $\mathbf{0 > p}$ אז הטור **מתכנס (!)** .

אם $\mathbf{0 \le p}$ אז הטור **מתבדר (!)** .

3. <u>עובדה אחת והערה אחת על הטור. שתיהן חשובות:</u>
- בטור הרמוני P מחליף סימן - **<u>תמיד נדע אם מתכנס או מתבדר</u>**.
- התנאי כאן, בניגוד להרמוני P רגיל, הוא $\boldsymbol{P > 0}$ ולא $\boldsymbol{P > 1}$. לשים לב. חוזר על עצמו המון.

4. <u>תרגיל לדוגמא:</u>

$$\sum \frac{(-1)^n}{n^2} = \sum \underbrace{(-1)^n}_{\text{מחליף סימן}} \cdot \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\text{הרמוני } p}$$

$P=2>0$ ולכן הטור מתכנס.

התכנסות בהחלט* או התכנסות *בתנאי

עד עכשיו דיברנו על התכנסות או התבדרות של טור.
עכשיו נפרט קצת יותר. נבדוק רמה אחת יותר לעומק.

מסתבר, שתחת המונח "טור מתכנס", ישנם שני סוגים של התכנסויות:

1. התכנסות בהחלט
2. התכנסות בתנאי

<u>נתחיל:</u>

1. <u>התכנסות בהחלט:</u>

נתון טור כלשהו $\sum a_n$. כעת, בפעם הראשונה, <u>נעיין בטור הערכים המוחלטים שלו:</u> $\sum |a_n|$.

<u>משפט ראשון:</u>

אם $\sum |a_n|$ מתכנס אז $\sum a_n$ מתכנס.
עכשיו במילים: אם טור הערכים המוחלטים מתכנס אז בוודאי שטור המקורי מתכנס.

<u>הגדרה:</u>

נתון טור כלשהו $\sum a_n$. <u>נסתכל טור הערכים המוחלטים:</u> $\sum |a_n|$.

אם הטור $\sum \|a_n\|$ מתכנס אז נגיד כי הטור המקורי <u>מתכנס בהחלט</u>.

דוגמא:

$$\sum (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2}$$

נתון $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2}$.

נבדוק את טור הערכים המוחלטים:

$$\sum \left|(-1)^n \cdot \frac{1}{n^2}\right| = \sum 1 \cdot \frac{1}{n^2} = \underbrace{\sum \frac{1}{n^2}}$$

טור הרמוני $p=2$
מתכנס.

קיבלנו כי $\sum |a_n|$ מתכנס ולכן נגיד כי $\sum a_n$ <u>מתכנס בהחלט</u>.

נמשיך:

2. התכנסות בתנאי:

נתון טור כלשהו $\sum a_n$. נעיין, שוב, בטור הערכים המוחלטים שלו: $\sum |a_n|$.

הגדרה:

נתון טור כלשהו $\sum a_n$. נסתכל טור הערכים המוחלטים: $\sum |a_n|$.

אם הטור $\sum |a_n|$ מתבדר והטור $\sum a_n$ מתכנס
אז נגיד כי הטור המקורי מתכנס בתנאי.

הסבר:
נבדוק את טור הערכים המוחלטים. במידה והוא מתכנס – נגיד כי הטור מתכנס בהחלט.
(את זה כבר ראינו בעמוד הקודם)
אבל, במידה וטור הערכים המוחלטים מתבדר – עלינו לחזור שוב אל הטור המקורי ולבדוק אותו.
כעת, אם הוא מתכנס, אז נגיד שהטור המקורי, עליו נשאלנו, **מתכנס בתנאי.**

הסבר לא רשמי: אפשר להתייחס לזה כאילו הטור המקורי מתכנס, בתנאי שלא שמנו עליו ערך מוחלט.

דוגמא:

$$\sum (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$$

נתון $\sum a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$

נבדוק טור ערכים מוחלטים:

$$\sum \left|(-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}\right| = \sum 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \underbrace{\sum \frac{1}{n^{0.5}}}_{\text{הרמוני } p=0.5 \text{ מתבדר}}$$

טור הערכים המוחלטים מתבדר.
נחזור ונסתכל שוב על הטור המקורי.

$$\sum (-1)^n \cdot \frac{1}{n^{0.5}}$$

זה טור הרמוני מחליף סימן $p>0$ ולכן מתכנס.
נגיד כי הטור שלנו מתכנס בתנאי.

מבחן המנה להתכנסות בהחלט

עד עכשיו, הדרך בה השתמשנו לבדיקת התכנסות בהחלט הייתה ניתוח טור הערכים המוחלטים.
כעת נלמד דרך נוספת.

בדיקת התכנסות בהחלט של טור באמצעות מבחן המנה להתכנסות בהחלט.
(המבחן מאוד מזכיר את מבחן המנה שכבר למדנו אבל הפעם הוא מבוצע עם ערך מוחלט).

מתי נשתמש?

בקורס שלנו, באופן חד משמעי, נשתמש כאשר הטור שלפנינו מכיל גם X וגם n.

הבדיקה שנבצע:

הבדיקה היא חישוב הגבול הבא:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

אם $\boxed{\rho < 1}$ <= מתכנס בהחלט

אם $\boxed{\rho > 1}$ <= מתבדר

אם $\boxed{\rho = 1}$ <= לא ידוע. אין תשובה חד משמעית. ברוב המקרים נוכל להציב ולבדוק בעצמנו.

דוגמא בעמוד הבא:

$$\sum \frac{x^n}{3n+4}$$

נפעיל את המבחן:

$$a_n = \frac{x^n}{3n+4}, \quad a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{3(n+1)+4}$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{3n+3+4}}{\frac{x^n}{3n+4}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x \cdot \cancel{x^n} \cdot (3n+4)}{\cancel{x^n} \cdot (3n+7)} \right| =$$

מותר לצמצם כי $x \neq 0$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| x \cdot \frac{3n+4}{3n+7} \right| = \lim_{n\to\infty} |x| \cdot \left| \frac{3n+4}{3n+7} \right| =$$

חוקי ערך מוחלט – $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

$$= |x| \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left| \frac{3n+4}{3n+7} \right|}_{=1} = |x| \cdot 1 = \underline{\underline{|x|}}$$

קיבלנו כי $\rho = |x|$.
לסיכום:
עבור $-1 \le x < 1$ הטור מתכנס בהחלט.
עבור $x \ge 1$ או $x < -1$ הטור מתבדר.
עבור $x = 1$:

$$\sum \frac{1}{3n+4} \ge \sum \frac{1}{3n+4n} = \frac{1}{7} \sum \frac{1}{n}$$

מתבדר
הרמוני $\rho = 1$

עבור $x = -1$:

$$\sum (-1)^n \cdot \frac{1}{3n+4} \longrightarrow$$

מתכנס
לפי מבחן לייבניץ.

נוסיף לתחום ההתכנסות את $\underline{\underline{-1}}$.

סיימנו.

טורי חזקות

הקדמה:

מסמך זה יכלול שני תתי נושאים:

1. טורי חזקות סביב $X = 0$.
2. טורי חזקות סביב $X = a$. (כאשר a מספר כלשהו)

טורי חזקות הוא הנושא הראשון אותו לומדים בקורס חדוא ב׳.
הנושא חופף, בחלקו, לנושא שכבר למדנו בחדוא א׳.

בשיעור המדבר על מבחן המנה להתכנסות בהחלט, דיברנו על טורים המכילים גם X וגם n,
הצגנו אותם כבאלה והתאמנו אליהם את דרך הפתרון.
כעת, בפעם הראשונה, נקרא לטור הזה בשמו במדויק – **טור חזקות.**

שימו לב – המסמך הזה חשוב ביותר להבנת המשך החומר בטורים, והוא מהווה בסיס עבורו.
נרחיב את הידע בהקשר של טורים אלה.

מבנה טור חזקות סביב $X = 0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n X^n$$

כאשר:

C_n – הוא החלק המספרי של הטור. דוגמאות $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, $(\frac{1}{3})^n$ וכו׳

X^n – החלק שאחראי על חזקות הטור.

הערה שחשוב להבין (!)

טור החזקות הזה הוא בעצם פולינום! אותו הפולינום שאנחנו מכירים במדויק!

עוד הערה חשובה – נבין בהמשך.

כאמור - טור החזקות הזה סובב סביב הנקודה $X = 0$. זהו מקרה ספציפי/פרטי.

דוגמא להצגת האיברים השונים של הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} X^n = X + \frac{1}{8}X^2 + \frac{1}{27}X^3 + \frac{1}{64}X^4 + \frac{1}{125}X^5 + \cdots$$

מה קיבלנו? קיבלנו פולינום!

חברים, מכאן והלאה, וכמו במקרה הנוכחי, הטורים שניתקל בהם יהיו טורים שהם בעצם פונקציה!
ניתן לומר שזהו טור פונקציות. ובמקרה שלנו טור שהוא פולינום.
השם הרשמי – טור חזקות. (המשתנה X מקבל עליו חזקות שונות כתלות במספר האיבר של הטור)

מהדיון עד כאן אנחנו מבינים שטור החזקות תלוי במשתנה X.
כלומר, במידה ונציב בטור Xים שונים – נקבל, עבור חלקם, התכנסות, ועבור חלק אחר – התבדרות.
זה בעצם לא חדש, כבר הכרנו זאת בחדו"א א'.

דוגמאות:

נניח $X = \frac{1}{2}$: נקבל טור מספרים. נציג 3 איברים ראשונים.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} X^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{27} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \mathbf{\frac{1}{2} + \frac{1}{32} + \frac{1}{216}} + ..$$

על פניו נראה ש... הטור מתכנס.

כעת נניח $X = 3$: נקבל טור מספרים. נציג 3 איברים ראשונים.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} X^n = 3 + \frac{1}{8} \cdot 3^2 + \frac{1}{27} \cdot 3^3 = \mathbf{3 + \frac{9}{8} + 1} + ..$$

על פניו נראה ש... הטור מתבדר.

אם כן – מה יעניין אותנו בנושא הזה? מה נרצה לדעת?

נראה בעמוד הבא.

נרצה לדעת:

<u>עבור אילו ערכים של X הטור מתכנס ועבור אילו ערכים של X הטור מתבדר?</u>

יישאלו אותנו: **"מהו תחום ההתכנסות של הטור?"**

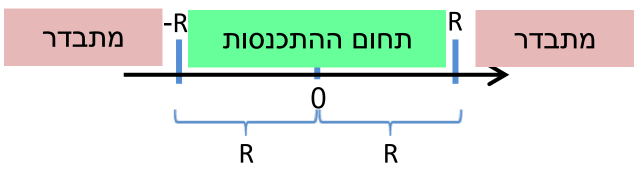
במילים אחרות מבקשים: "תמצאו את כל ה-Xים שאם נציב אותם בטור – אז הוא יתכנס וגם את כל ה-Xים שאם נציב אותם בטור – אז הוא מתבדר.
(שוב, זאת בדומה לחדו"א א')

<u>ה-משפט ה-מרכזי:</u>

לטור $\sum_{n=0}^{\infty} C_n X^n$:

1. קיים רדיוס התכנסות שנקרא לו R.
2. רדיוס (R) הוא תמיד חיובי (גדול מ-0)
3. רדיוס ההתכנסות הוא סביב הנקודה $X = 0$.

נוח לראות זאת על ציר המספרים הרגיל:



אם $|X| < R$ – הטור מתכנס.

אם $|X| > R$ – הטור מתבדר.

אם $|X| = R$ – כלומר אם $X = \pm R$ - אז נבדוק ישירות. (ע"י הצבה – כמו בחדו"א א')

בעמוד הבא – מציאת רדיוס ההתכנסות.

מציאת רדיוס ההתכנסות

כמו שאנחנו כבר יודעים – נמצא את רדיוס ההתכנסות באמצעות:
משפט המנה להתכנסות בהחלט.

נסמן: $\mathbf{U_n} = C_n \cdot X^n$

נזכיר את הבדיקה שמבצעים:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right|$$

אם $\boxed{\rho < 1}$ <= הטור מתכנס בהחלט

אם $\boxed{\rho > 1}$ <= הטור מתבדר

אם $\boxed{\rho = 1}$ <= לא ידוע. אין תשובה חד משמעית. ברוב המקרים נוכל להציב ולבדוק בעצמנו.

ניפעל על פי השלבים הבאים:

1. נחשב ρ ונמצא את רדיוס ההתכנסות.
2. מציבים $X = \pm R$ בטור ובודקים מה יוצא לפי הידע הקודם בטורים.

כעת, יש לנו את תחום ההתכנסות של הטור.

תרגיל לדוגמא:
מצאו את תחום ההתכנסות של הטור: (הפעם ב-k)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5^k \cdot k} \cdot X^k$$

הפתרון בהקלטה.

התשובה הסופית:
הטור מתכנס בהחלט עבור $-5 < X < 5$
הטור מתכנס $-5 \le X < 5$
"תחום ההתכנסות הוא $-5 \le X < 5$"
רדיוס ההתכנסות הוא $R = 5$.

בעמוד הבא – אותו טור חזקות אבל הפעם – **סביב נקודה אחרת שהיא לא** $\mathbf{X = 0}$.

<u>טור חזקות – סביב נקודה a</u>

עכשיו נדבר על אותו טור חזקות אבל הפעם **<u>תחום ההתכנסות "יזוז הצידה" ולא יהיה סביב $X = 0$.</u>**

הפעם תחום ההתכנסות **<u>ינוע סביב נקודה כללית כלשהי $X = a$.</u>**

הטור הכללי ייראה כך:

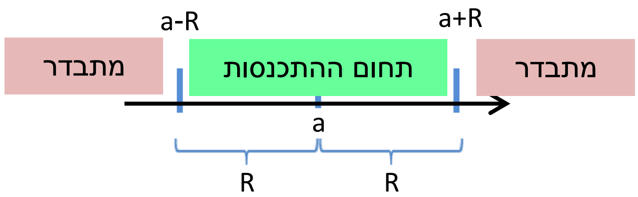
החלק שאומר שהטור נע סביב a.

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(X-a)^n$$

וגם כאן נגיד כי:

1. קיים רדיוס התכנסות שנקרא לו R.
2. רדיוס (R) הוא תמיד חיובי (גדול מ-0)
3. רדיוס ההתכנסות הוא סביב הנקודה $X = a$.

נראה בציור:



וכלל ההחלטה מותאם לפי התזוזה:

אם $|X-a| < R$ – הטור מתכנס.

אם $|X-a| > R$ – הטור מתבדר.

אם $|X-a| = R$ – כלומר אם $X - a = \pm R$ - אז נבדוק ישירות. (ע"י הצבה – כמו בחדו"א א')

<u>ניפעל על פי השלבים הבאים:</u>

1. נחשב ρ ונמצא את רדיוס ההתכנסות.
2. נשים לב - **מציבים $X = a \pm R$ בטור** ובודקים מה יוצא לפי הידע הקודם בטורים.

כעת, יש לנו את תחום ההתכנסות של הטור.