

מהו טור:

עד עכשיו דיברנו על סדרות. כל איבר בסדרה עמד בפני עצמו. (היה פסיק בין האיברים)
כעת נדבר על:

טור = סכום האיברים של הסדרה

על מנת להציג טור נשתמש בסימן המתמטי **סיגמא**.
נציג טור:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = \text{(תשובה)}$$

זה טור שכיח. נלמד בהמשך.
נראה עוד דוגמאות:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 6 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + \dots = \text{(תשובה)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots = \text{(תשובה)}$$

למה לומדים טורים? מה יעניין אותנו?

בנושא טורים השאלה הנשאלת היא:
מה ניתן להגיד על סכום הטור? (מהו הסכום באינסוף?)
לפנינו 2 מצבים:

אם לטור סכום סופי = נגיד "הטור מתכנס"
אם לטור סכום אינסופי = נגיד "הטור מתבדר"

הערה חשובה:

ההסתכלות על נושא זה דומה להסתכלות שבנושאים גבולות ואינטגרלים מוכללים.
אנחנו מסתכלים על ההתנהגות באינסוף(!) ולכן - כל הטקטיקות לפתרון בהתאם.

נראה דוגמא לטור מתכנס:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots = 1$$

נגיד – הטור שלפנינו מתכנס וערכו (של הסכום) הוא **1**.

אם כך, בהינתן טור $\sum a_n$ כיצד נקבע אם הוא מתכנס או מתבדר?
נקבע זאת על פי **מבחני ההתכנסות**.

חלוקת הטורים ל-3 סוגים שונים תמונת על

טורים לא זה ולא זה – 15%	טורים מחליפי סימן – 15%	טורים חיוביים – 70%
$\sin(n)$ $\cos(n)$ בדיקת התכנסות בהחלט/בתנאי ע"י בדיקת טור הערכים המוחלטים או ע"י מבחן המנה להתכנסות בהחלט	מבחן לייבניץ הרמוני p מחליף סימן	טור גיאומטרי טור הרמוני p מבחן המנה להתכנסות מבחן ההשוואה מבחן ההשוואה הגבולי

כלים נוספים, רוחביים, שנשתמש בהם לבדיקות שונות:

1. תנאי הכרחי להתכנסות
2. אריתמטיקה של טורים + משפט נוסף

תנאי הכרחי להתכנסות

נתון טור חיובי $\sum a_n$.
נבדוק את התנאי מטה על מנת לגלות האם קיים פוטנציאל להתכנסות הטור.

1. הבדיקה היא:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 0$$

אם ערך הגבול $= 0$ אזי יש סיכוי שהטור יתכנס (!).

אם ערך הגבול $\neq 0$ אזי בוודאות הטור מתבדר (!).

הסבר:

בדיקת התנאי הכרחי להתכנסות היא, בעצם, בדיקת היתכנות להתכנסות.
זו בדיקה ראשונית. במידה והתנאי לא מתקיים, אין תרגיל. כלומר, נכריז שהטור מתבדר ונעבור לתרגיל הבא.
במילים אחרות, הבדיקה עונה על השאלות הנרדפות הבאות:

- "האם יש סיכוי שהטור שלפנינו יתכנס?"
- "האם יש טעם בכלל להתחיל לבדוק את מבחני ההתכנסות?"

הערה חשובה:

זהו תנאי הכרחי אך לא מספיק (!)

2. תרגיל לדוגמא:

נתון הטור $\sum \frac{1}{n}$. האם הטור מתכנס או מתבדר?

נבדוק "תנאי הכרחי להתכנסות":

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \right) = 0$$

התנאי אכן מתקיים. יש פוטנציאל להתכנסות אבל (!) הטור הזה מתבדר. (כפי שנראה בהמשך)

3. תרגיל נוסף לדוגמא:

נתון הטור $\sum \frac{4n+8}{6n+3}$. האם הטור מתכנס או מתבדר?

נבדוק "תנאי הכרחי להתכנסות":

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n+8}{6n+3} \right) = \frac{4}{6}$$

התנאי לא מתקיים (!).

מסקנה: הטור מתבדר.

טור גיאומטרי

1. זיהוי ויזואלי:

משתנה (מספר)

כך זה ייראה:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

2. הבדיקה שנבצע:

אם $-1 < q < 1$ אז הטור מתכנס (!).

אחרת - הטור מתבדר (!).

3. עובדות חשובות על הטור:

- בטור גיאומטרי - תמיד נדע אם מתכנס או מתבדר.
- בטור גיאומטרי - תמיד נדע את סכומו.
- נוסחת הסכום של טור גיאומטרי (כאשר n מתחיל מ-0):

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

4. תרגיל לדוגמא:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

קיבלנו ש- $q = \frac{1}{4}$. כלומר $-1 < q < 1$. כלומר הטור שלפנינו מתכנס (!).
סכומו:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

טור הרמוני p

1. זיהוי ויזואלי:

$$\frac{\text{מספר}}{\text{מספר (משתנה)}}$$

כך זה ייראה:

$$\sum \frac{1}{n^p}$$

2. הבדיקה שנבצע:

אם $p > 1$ אז הטור מתכנס (!).
אם $p \leq 1$ אז הטור מתבדר (!).

3. עובדה חשובה על הטור:

• בטור הרמוני P - תמיד נדע אם מתכנס או מתבדר.

4. תרגיל לדוגמא:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{n}}{n^4} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3.5}}$$

קיבלנו ש- $p = 3.5$. כלומר $p > 1$. כלומר הטור שלפנינו מתכנס (!).

אריתמטיקה של טורים ומשפט נוסף

אם $\sum a_n$ מתכנס וגם $\sum b_n$ מתכנס אזי:

טור הסכום: $\sum(a_n + b_n)$, טור ההפרש: $\sum(a_n - b_n)$, טור כפל בקבוע: $\sum(C \cdot a_n)$

הם טורים מתכנסים (!)

הערה מרעידה: (כמו בשאר הנושאים)

מותר להשתמש במשפט האריתמטיקה רק במידה ובמצב ההתחלתי יש לפנינו שני טורים מתכנסים. אחרת – אסור להשתמש במשפט. נחפש פתרון אחר.

תרגיל לדוגמא:

הוכיחו כי הטור $\sum \frac{3^n + 5^n}{7^n}$ מתכנס.

פתרון:

$$\sum \frac{3^n + 5^n}{7^n} = \sum \frac{3^n}{7^n} + \sum \frac{5^n}{7^n} = \sum \left(\frac{3}{7}\right)^n + \sum \left(\frac{5}{7}\right)^n$$

הטור $\sum \left(\frac{3}{7}\right)^n$ הוא טור גיאומטרי מתכנס כי $q = \frac{3}{7}$

הטור $\sum \left(\frac{5}{7}\right)^n$ הוא טור גיאומטרי מתכנס כי $q = \frac{5}{7}$

הטור $\sum \left(\frac{3}{7}\right)^n + \sum \left(\frac{5}{7}\right)^n$ הוא טור הסכום של שני הטורים מעלה ולכן, לפי משפט אריתמטיקה הוא טור מתכנס.

משפט נוסף:

אם $\sum a_n$ מתכנס וגם $\sum b_n$ מתבדר אזי:

טור הסכום וההפרש: $\sum a_n \pm b_n$ הוא טורים מתבדרים.

הערות:

טור הסכום של שני טורים מתבדרים הוא טור מתבדר.

לא ניתן להגיד כלום על הפרש בין טורים מתבדרים. פשוט אין משפט כזה.

מבחן המנה להתכנסות

1. באילו מקרים נשתמש במבחן הזה:

- במקרים רבים - כאשר המשתנה n יופיע בבסיס של גורם אחד וגם במעריך של גורם אחר.
- במקרים רבים - כאשר n יופיע במעריך של גורם כלשהו.
- במקרים רבים - כאשר n יופיע בתוך שורש.
- במקרים של עצרת ($n!$).

2. הבדיקה שנבצע:

הבדיקה היא חישוב הגבול הבא:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right)$$

אם $\rho < 1$ התכנסות

אם $\rho > 1$ התבדרות

אם $\rho = 1$ לא ידוע. אין תשובה. המבחן לא מתאים. נחפש מבחן אחר.

3. תרגיל לדוגמא:

$$\begin{aligned} & \leq n^3 \cdot 3^{-\frac{n}{2}} = \leq \frac{n^3}{3^{\frac{n}{2}}} \Rightarrow \leq a_n = \frac{n^3}{3^{\frac{n}{2}}} \\ & \leq a_{n+1} = \frac{(n+1)^3}{3^{\frac{n+1}{2}}} \\ \rho &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^3}{3^{\frac{n+1}{2}}}}{\frac{n^3}{3^{\frac{n}{2}}}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 \cdot 3^{\frac{n}{2}}}{n^3 \cdot 3^{\frac{n+1}{2}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^3 \cdot \frac{1}{3^{0.5}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^3 \cdot \frac{1}{3^{0.5}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \rho &= \frac{1}{\sqrt{3}} < 1 \end{aligned}$$

ולכן הסדר מתכנס! יא פי גרמן הייתה.

מבחן האינטגרל

יהי $\sum a_n$ טור בעל איברים חיוביים ותהי $f(x)$ הפונקציה המתאימה לאחר החלפת n ב- x :
אז נבדוק:

אם: $f(x)$ יורדת ורציפה החל ממקום מסוים

אז: האינטגרל $\int_a^\infty f(x)dx$ והטור $\sum a_n$ מתכנסים/מתבדרים יחדיו.

הערות חשובות:

1. הפרמטר a הוא פרמטר חיובי.
2. במקרה של התכנסות – לא נסיק מסקנה לגבי הערך אליו הטור מתכנס אלא רק על עצם ההתכנסות.

נראה דוגמא:

ניקח את הטור הבא: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$
נבחן את n ו- x ונציב את הפונקציה המתאימה:
הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x^3} \rightarrow (1, \infty)$
הקטע הממשי (זכי האור שנשארו עי') הוא $(1, \infty)$.
נאביר את האינטגרל: $\int_1^\infty \frac{1}{x^3} dx$
זהו האינטגרל ההרמוני $p=3$ ואכן הוא מתכנס.
לכן, נוסף, שהאור עי' נשארו, אם מתכנס.
(כי שניהם מתכנסים/מתבדרים יחד...)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

נבדוק אם הסדרה:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

הפכה לפונקציה
היא רציפה ויורדת בתחום $(1, \infty)$.
נצייר אינטגרל לשאיס ונבדוק אותו:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$$

זה אינטגרל הרמוני $p=1$ מתבדר.

לכן גם הסדרה מתבדרת. סוף.

מבחן ההשוואה הקלאסי

נשתמש במשפט ההשוואה הקלאסי כאשר לפנינו יהיו שני טורים אי שליליים: $b_n \geq 0, a_n \geq 0$

$$\sum a_n \leq \sum b_n$$

ואז, אם יחס סדר הגודל הוא:

כלומר $\sum a_n$ הוא הטור הקטן מבין השניים ו- $\sum b_n$ הוא הטור הגדול מבניהם, אז נדע ש:

אם $\sum b_n$ מתכנס אז $\sum a_n$ מתכנס.

אם $\sum a_n$ מתבדר אז $\sum b_n$ מתבדר.

תרגיל לדוגמא:

$$\leq \frac{n}{\sqrt{n^4 + 2n}} \geq \sum \frac{n}{\sqrt{n^4 + 2n^4}} = \sum \frac{n}{\sqrt{3n^4}}$$

$$= \sum \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{n}{n^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \underbrace{\sum \frac{1}{n}}_{\text{סדרה מתכנסת!}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \infty = \underline{\underline{\infty}}$$

האור שלנו, המקורי, גדול יותר מאור מתכנס ולכן מתכנס בעצמו.

מבחן ההשוואה הגבולי

נתון טור $a_n \geq 0$ טור נחקר. (זה הטור עליו נשאלנו)

יהי טור $b_n \geq 0$ טור בוחן. (זה טור מוכר שאנחנו בוחרים בו – מהראש, ומשתמשים בו כבוחן)

לפי המבחן – נחשב את הגבול הבא:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$$

אם קיבלנו ש- $\rho > 0$ אזי הטורים שלנו הם טורים מאותו "סוג", מאותו "טיפוס", כלומר מתכנסים יחד או מתבדרים ביחד.

אם $\rho = 0$ אז: אם $\sum b_n$ מתכנס אז $\sum a_n$ מתכנס ואם $\sum a_n$ מתבדר אז $\sum b_n$ מתבדר (אבל ההיפך אינו נכון)

אם $\rho = \infty$ אז: אם $\sum b_n$ מתבדר אז $\sum a_n$ מתבדר ואם $\sum a_n$ מתכנס אז $\sum b_n$ מתכנס (אבל ההיפך אינו נכון)

תרגיל לדוגמא:

הכינו ט $\frac{1}{n+2} \leq a_n$ האורז
 $\downarrow$
 $a_n = \frac{1}{n+2}$, $b_n = \frac{1}{n} \leftarrow$ כן
 הבוחן

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} = \underline{\underline{1}}$$

$\rho = 1$! פאז האורז פאקורי ואור הבוחן הם מאולד הסו. אור הבוחן $\frac{1}{n} \leq a_n$ פאקורי נאס אס האור $\frac{1}{n+2} \leq a_n$!

טורים מחליפי סימן

עד עכשיו דיברנו על טורים חיוביים.

כעת אנחנו מתחילים לדבר על טורים מחליפי סימן.

הגדרה:

טור מחליף סימן הוא טור שאיבריו הם לסירוגין $+$ ו $-$ (מינוס).

דוגמאות:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

הערה חשובה: הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n)$ אינו מחליף סימן (!) מכיוון שאין החלפת סימן...

$$\sin(1) = 0.84, \sin(2) = 0.91, \sin(3) = 0.14$$

מבנה טור מחליף סימן:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$$

האיבר הכללי של הטור הוא $(-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ והוא מורכב משני חלקים:

1. $(-1)^n$ - זה החלק האחראי על הסימן (בלבד!)

2. $\frac{1}{n}$ - הוא החלק החיובי של האיבר הכללי.

לימוד מבחן לייבניץ – בעמוד הבא

מבחן לייבניץ

מבחן לייבניץ הוא מבחן שמציג תנאי מספיק להתכנסות של טור מחליף סימן.

בהינתן טור $\sum (-1)^n \cdot a_n$, מחליף סימן, נבדוק את התנאים הבאים:

1. $a_n > 0$ - (החלק החיובי שבאיבר הכללי חייב להיות חיובי – מובן מאליו. טריויאלי)

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, כלומר a_n שואף ל-0 כאשר נבדוק התנהגות באינסוף.

3. a_n היא סדרה יורדת החל ממוקום מסוים (בדרך הופכים לפונקציה, גוזרים, ומראים שהנגזרת

שלילית ממוקום מסוים).

במידה וכל שלושת התנאים מתקיימים (!)

נגיד שהטור $\sum (-1)^n \cdot a_n$ מתכנס לפי מבחן לייבניץ.

תרגיל לדוגמא:

$$\sum \frac{(-1)^n}{n+4} = \sum (-1)^n \cdot \underbrace{\frac{1}{n+4}}_{\text{חלק חיובי}}$$

1. $\frac{1}{n+4} > 0$. טריויאלי כי n לא שלילי (חיובי).

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+4} = 0$

3. $\frac{1}{n+4} > \frac{1}{n+5}$ סדרה יורדת.
 זכור! זכור! זכור! זכור! זכור! זכור! זכור! זכור! זכור! זכור!

הטור $\sum (-1)^n \cdot \frac{1}{n+4}$ מתכנס לפי מבחן לייבניץ.

טור הרמוני p מחליף סימן

1. זיהוי ויזואלי:

$$\boxed{(-1)^n \cdot \frac{\text{מספר}}{\text{מספר (משתנה)}}}$$

כך זה ייראה:

$$\sum (-1)^n \cdot \frac{1}{n^p}$$

2. הבדיקה שנבצע:

אם $p > 0$ אז הטור מתכנס (!).

אם $p \leq 0$ אז הטור מתבדר (!).

3. עובדה אחת והערה אחת על הטור. שתיהן חשובות:

- בטור הרמוני P מחליף סימן - תמיד נדע אם מתכנס או מתבדר.
- התנאי כאן, בניגוד להרמוני P רגיל, הוא $P > 0$ ולא $P > 1$. לשים לב. חוזר על עצמו המון.

4. תרגיל לדוגמא:

$$\sum \frac{(-1)^n}{n^2} = \sum \underbrace{(-1)^n}_{\text{מחליף סימן}} \cdot \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\text{הרמוני } p}$$

$p=2 > 0$ אז הטור מתכנס.

התכנסות בהחלט או התכנסות בתנאי

עד עכשיו דיברנו על התכנסות או התבדרות של טור. עכשיו נפרט קצת יותר. נבדוק רמה אחת יותר לעומק.

מסתבר, שתחת המונח "טור מתכנס", ישנם שני סוגים של התכנסויות:

1. התכנסות בהחלט
2. התכנסות בתנאי

נתחיל:

1. התכנסות בהחלט:

נתון טור כלשהו $\sum a_n$. כעת, בפעם הראשונה, נעיין בטור הערכים המוחלטים שלו: $\sum |a_n|$.

משפט ראשון:

אם $\sum |a_n|$ מתכנס אז $\sum a_n$ מתכנס. עכשיו במילים: אם טור הערכים המוחלטים מתכנס אז בוודאי שטור המקורי מתכנס.

הגדרה:

נתון טור כלשהו $\sum a_n$. נסתכל טור הערכים המוחלטים: $\sum |a_n|$.

אם הטור $\sum |a_n|$ מתכנס אז נגיד כי הטור המקורי מתכנס בהחלט.

דוגמא:

$$\leq (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2}$$

$$a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2}$$

נבדוק את טור הערכים המוחלטים:

$$\leq |(-1)^n \cdot \frac{1}{n^2}| = \leq 1 \cdot \frac{1}{n^2} = \leq \frac{1}{n^2}$$

טור הראשוני $p=2$ מתכנס.

קיבלנו כי $|a_n| \leq q_n$ ונניח q_n מתכנס בהחלט.

נמשיך:

2. התכנסות בתנאי:

נתון טור כלשהו $\sum a_n$. נעיין, שוב, בטור הערכים המוחלטים שלו: $\sum |a_n|$.

הגדרה:

נתון טור כלשהו $\sum a_n$. נסתכל טור הערכים המוחלטים: $\sum |a_n|$.

**אם הטור $\sum |a_n|$ מתבדר והטור $\sum a_n$ מתכנס
אז נגיד כי הטור המקורי מתכנס בתנאי.**

הסבר:

נבדוק את טור הערכים המוחלטים. במידה והוא מתכנס – נגיד כי הטור מתכנס בהחלט.
(את זה כבר ראינו בעמוד הקודם)
אבל, במידה וטור הערכים המוחלטים מתבדר – עלינו לחזור שוב אל הטור המקורי ולבדוק אותו.
כעת, אם הוא מתכנס, אז נגיד שהטור המקורי, עליו נשאלנו, **מתכנס בתנאי**.

הסבר לא רשמי: אפשר להתייחס לזה כאילו הטור המקורי מתכנס, בתנאי שלא שמנו עליו ערך מוחלט.

דוגמא:

$$\leq (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\sum a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{נניח}$$

נבדוק טור ערכים מוחלטים:

$$\leq |(-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}| =$$

$$= \leq 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \leq \frac{1}{n^{0.5}}$$

הראוי $p=0.5$
מתבדר

טור הערכים המוחלטים מתבדר.
נחזור ונסתכל שוב על האור המקורי.

$$\leq (-1)^n \cdot \frac{1}{n^{0.5}}$$

זה טור הראוי מתאם סיון $p > 0$ ולכן מתכנס.
נגיד כי האור של $\sum a_n$ מתכנס בתנאי.

מבחן המנה להתכנסות בהחלט

עד עכשיו, הדרך בה השתמשנו לבדיקת התכנסות בהחלט הייתה ניתוח טור הערכים המוחלטים. כעת נלמד דרך נוספת.

בדיקת התכנסות בהחלט של טור באמצעות מבחן המנה להתכנסות בהחלט. (המבחן מאוד מזכיר את מבחן המנה שכבר למדנו אבל הפעם הוא מבוצע עם ערך מוחלט).

מתי נשתמש?

בקורס שלנו, באופן חד משמעי, נשתמש כאשר הטור שלפנינו מכיל גם X וגם n .

הבדיקה שנבצע:

הבדיקה היא חישוב הגבול הבא:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

אם $\rho < 1$ מתכנס בהחלט

אם $\rho > 1$ מתבדר

אם $\rho = 1$ לא ידוע. אין תשובה חד משמעית. ברוב המקרים נוכל להציב ולבדוק בעצמנו.

דוגמא בעמוד הבא:

$$\sum \frac{x^4}{3n+4}$$

נבדוק את ההתכנסות: $a_n = \frac{x^4}{3n+4}, a_{n+1} = \frac{x^{4+1}}{3(n+1)+4}$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{4+1}}{3(n+1)+4}}{\frac{x^4}{3n+4}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x \cdot x^4 \cdot (3n+4)}{x^4 \cdot (3n+7)} \right| =$$

אם $x \neq 0$ אז

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| x \cdot \frac{3n+4}{3n+7} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x| \cdot \left| \frac{3n+4}{3n+7} \right| =$$

חוקי גבול - $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

$$= |x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3n+4}{3n+7} \right| = |x| \cdot 1 = |x|$$

קבלנו כי $\rho = |x|$

אם $-1 \leq x < 1$ - הסדר מתכנס בהתאם.

אם $x \geq 1$ או $x \leq -1$ הסדר מתפזר.

אם $x = 1$ - הסדר מתכנס.

$$\sum \frac{1}{3n+4} \geq \sum \frac{1}{3n+4n} = \sum \frac{1}{7n} \geq \frac{1}{7} \geq \frac{1}{n}$$

הסדר מתכנס לפי $\rho = 1$

אם $x = -1$ - הסדר מתכנס.

נוסף לחתום הסדר מתכנס. אם $x = -1$ - הסדר מתכנס. אם $x = 1$ - הסדר מתכנס. אם $x = -1$ - הסדר מתכנס.

טורי חזקות

הקדמה:

מסמך זה יכלול שני תתי נושאים:

1. טורי חזקות סביב $X = 0$.
2. טורי חזקות סביב $X = a$ (כאשר a מספר כלשהו).

טורי חזקות הוא הנושא הראשון אותו לומדים בקורס חדוא ב'. הנושא חופף, בחלקו, לנושא שכבר למדנו בחדוא א'.

בשיעור המדבר על מבחן המנה להתכנסות בהחלט, דיברנו על טורים המכילים גם X וגם n , הצגנו אותם ככאלה והתאמנו אליהם את דרך הפתרון. כעת, בפעם הראשונה, נקרא לטור הזה בשמו במדויק – **טור חזקות**.

שימו לב – המסמך הזה חשוב ביותר להבנת המשך החומר בטורים, והוא מהווה בסיס עבורו. נרחיב את הידע בהקשר של טורים אלה.

מבנה טור חזקות סביב $X = 0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n X^n$$

כאשר:

C_n – הוא החלק המספרי של הטור. דוגמאות $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, $(\frac{1}{3})^n$ וכו'.

X^n – החלק שאחראי על חזקות הטור.

הערה שחשוב להבין (!)

טור החזקות הזה הוא בעצם פולינום! אותו הפולינום שאנחנו מכירים במדויק!

עוד הערה חשובה – נבין בהמשך.

כאמור - טור החזקות הזה טובב סביב הנקודה $X = 0$. זהו מקרה ספציפי/פרטי.

דוגמא להצגת האיברים השונים של הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} X^n = X + \frac{1}{8} X^2 + \frac{1}{27} X^3 + \frac{1}{64} X^4 + \frac{1}{125} X^5 + \dots$$

מה קיבלנו? קיבלנו פולינום!

חברים, מכאן והלאה, וכמו במקרה הנוכחי, הטורים שניתקל בהם יהיו טורים שהם בעצם פונקציה ! ניתן לומר שזהו טור פונקציות. ובמקרה שלנו טור שהוא פולינום.

השם הרשמי – טור חזקות. (המשתנה X מקבל עליו חזקות שונות כתלות במספר האיבר של הטור)

מהדיון עד כאן אנחנו מבינים שטור החזקות תלוי במשתנה X .

כלומר, במידה ונציב בטור X ים שונים – נקבל, עבור חלקם, התכנסות, ועבור חלק אחר – התבדרות. זה בעצם לא חדש, כבר הכרנו זאת בחדו"א א'.

דוגמאות:

נניח $X = \frac{1}{2}$: נקבל טור מספרים. נציג 3 איברים ראשונים.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} X^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{27} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{32} + \frac{1}{216} + \dots$$

על פניו נראה ש... הטור מתכנס.

כעת נניח $X = 3$: נקבל טור מספרים. נציג 3 איברים ראשונים.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} X^n = 3 + \frac{1}{8} \cdot 3^2 + \frac{1}{27} \cdot 3^3 = 3 + \frac{9}{8} + 1 + \dots$$

על פניו נראה ש... הטור מתבדר.

אם כן – מה יעניין אותנו בנושא הזה? מה נרצה לדעת?

נראה בעמוד הבא.

עבור אילו ערכים של X הטור מתכנס ועבור אילו ערכים של X הטור מתבדר?

יישאלו אותנו: "מהו תחום ההתכנסות של הטור?"

במילים אחרות מבקשים: "תמצאו את כל ה- X ים שאם נציב אותם בטור – אז הוא יתכנס וגם את כל ה- X ים שאם נציב אותם בטור – אז הוא מתבדר.
(שוב, זאת בדומה לחדו"א א')

ה-משפט ה-מרכזי:

לטור $\sum_{n=0}^{\infty} C_n X^n$:

1. קיים רדיוס התכנסות שנקרא לו R .
2. רדיוס (R) הוא תמיד חיובי (גדול מ-0)
3. רדיוס ההתכנסות הוא סביב הנקודה $X = 0$.

נוח לראות זאת על ציר המספרים הרגיל:



אם $|X| < R$ – הטור מתכנס.

אם $|X| > R$ – הטור מתבדר.

אם $|X| = R$ – כלומר אם $X = \pm R$ – אז נבדוק ישירות. (ע"י הצבה – כמו בחדו"א א')

בעמוד הבא – מציאת רדיוס ההתכנסות.

מציאת רדיוס ההתכנסות

כמו שאנחנו כבר יודעים – נמצא את רדיוס ההתכנסות באמצעות:
משפט המנה להתכנסות בהחלט.

$$U_n = C_n \cdot X^n \quad \text{נסמן:}$$

נזכיר את הבדיקה שמבצעים:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right|$$

אם $\rho < 1$ $\Rightarrow$ הטור מתכנס בהחלט

אם $\rho > 1$ $\Rightarrow$ הטור מתבדר

אם $\rho = 1$ $\Rightarrow$ לא ידוע. אין תשובה חד משמעית. ברוב המקרים נוכל להציב ולבדוק בעצמנו.

ניפעל על פי השלבים הבאים:

1. נחשב ρ ונמצא את רדיוס ההתכנסות.
2. מציבים $X = \pm R$ בטור ובודקים מה יוצא לפי הידע הקודם בטורים.

כעת, יש לנו את תחום ההתכנסות של הטור.

תרגיל לדוגמא:

מצאו את תחום ההתכנסות של הטור: (הפעם ב- k)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5^k \cdot k} \cdot X^k$$

הפתרון בהקלטה.

התשובה הסופית:

הטור מתכנס בהחלט עבור $-5 < X < 5$

הטור מתכנס $-5 \leq X < 5$

"תחום ההתכנסות הוא $-5 \leq X < 5$ "

רדיוס ההתכנסות הוא $R = 5$.

בעמוד הבא – אותו טור חזקות אבל הפעם – **סביב נקודה אחרת שהיא לא $X = 0$** .

טור חזקות – סביב נקודה a

עכשיו נדבר על אותו טור חזקות אבל הפעם תחום ההתכנסות "יזוז הצידה" ולא יהיה סביב $X = 0$.

הפעם תחום ההתכנסות ינוע סביב נקודה כללית כלשהי $X = a$.

הטור הכללי ייראה כך:

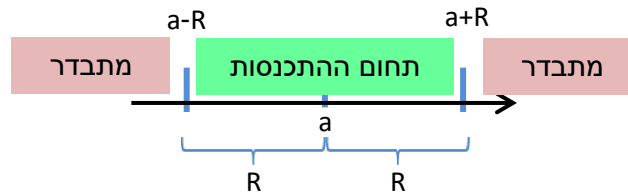
החלק שאומר שהטור
נוע סביב a .

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (X - a)^n$$

וגם כאן נגיד כי:

1. קיים רדיוס התכנסות שנקרא R .
2. רדיוס (R) הוא תמיד חיובי (גדול מ-0).
3. רדיוס ההתכנסות הוא סביב הנקודה $X = a$.

נראה בציר:



וכלל ההחלטה מותאם לפי התזוזה:

- אם $|X - a| < R$ – הטור מתכנס.
- אם $|X - a| > R$ – הטור מתבדר.
- אם $|X - a| = R$ – כלומר אם $X - a = \pm R$ – אז נבדוק ישירות. (ע"י הצבה – כמו בחדו"א א')

ניפעל על פי השלבים הבאים:

1. נחשב ρ ונמצא את רדיוס ההתכנסות.
 2. נשים לב - **מציבים $X = a \pm R$ בטור** ובודקים מה יוצא לפי הידע הקודם בטורים.
- כעת, יש לנו את תחום ההתכנסות של הטור.

תרגיל לדוגמא:

מצאו את תחום ההתכנסות של הטור:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{\sqrt{k}} \cdot (2 - X)^k$$

הפתרון בהקלטה.

התשובה הסופית: לפתור

הטור מתכנס בהחלט עבור $-5 < X < 5$

הטור מתכנס $-5 \leq X < 5$

"תחום ההתכנסות הוא $-5 \leq X < 5$ "

רדיוס ההתכנסות הוא $R = 5$.

תהליך הפתרון כאן זהה לטור חזקות סביב $X = 0$ אבל (!):

הערה חשובה:

בהצבת הקצוות – נציב את $X = a + R$ ואת $X = a - R$

סוף נושא טורי חזקות