

## שברים

### הקדמה:

נושא שברים הנו נושא בסיסי שנלמד בבית ספר יסודי. הוא נמצא כאן עבור מי שהיה שם לפני 25-15 שנה או אחרים שמרגישים שהם צריכים רענון. גם אם נראה לכם שה "נושא קל" ושאתם כבר יודעים אותו, כדאי לעבור על המסמך ולוודא את הידע שלכם בתרגול.

הנושא מהווה בסיס קריטי להצלחה בקורס. מסמך זה מטרתו לישר קו בכל הקשור לפעולות חשבון בין שברים. ברור שבמהלך הקורס יש, תמיד, מחשבון לידכם. עם זאת, שברים הוא נושא בסיסי שחייבים להכיר בעל פה. בסוף המסמך מופיע תרגול לפי נושאים ואחריו פתרונות מלאים. נתחיל:

### 1. היכרות עם שברים

#### מהו שבר?

שבר הוא חלק מתוך שלם. שבר נכתב כיחס בין שני מספרים כאשר החלק העליון נקרא מונה והחלק התחתון מכנה. נציג מבנה של שבר:

$$\frac{\text{מונה}}{\text{מכנה}}$$

#### דוגמאות:

$$\frac{1}{2} = \text{חצי} = \text{אחד מתוך שתיים}$$

$$\frac{3}{5} = \text{שלוש מתוך חמש} = \text{שלוש חמישיות}$$

$$\frac{7}{10} = \text{שבע מתוך עשר} = \text{שבע עשיריות}$$

### 2. צמצום והרחבת שברים

שבר יכול להיכתב במספר אינסופי של וריאציות ועדיין לשמור על ערכו. (הערך נשמר כל עוד היחס בין מונה למכנה נשמר) על מנת לצמצם או להרחיב שברים יש לחלק או להכפיל את המונה והמכנה באותו מספר. חלוקת מונה ומכנה במספר קבוע = "צמצום" שברים. כפל מונה ומכנה במספר קבוע = "הרחבת" שברים. מה אסור לעשות? להוסיף/להחסיר מהמונה ומהמכנה את אותו המספר.

#### דוגמאות:

$$1. \frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{5}{10} = \frac{20}{40} \dots \dots$$

$$2. \frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{9}{15} = \frac{15}{25} \dots \dots$$

$$3. \frac{4}{9} = \frac{8}{18} = \frac{16}{36} = \frac{20}{45} \dots \dots$$

### 3. הגדלת/הקטנת שברים

יש שני נושאים חשובים בקורס, שנקראים: "הערכת האינטגרל ו- "טורים". יש עוד זמן עד שנגיע אליהם. שניהם ידרשו מאתנו להגדיל או להקטין שברים.

(בקורס שמספרו 10142 הנושא יופיע בחלקים אחרים)

נלמד כיצד ניתן לבצע זאת:

#### 1. הגדלת שבר

על מנת להגדיל שבר נוכל: {מצד שמאל שבר מקורי. מימין שבר עליו "עבדנו"}

א. להגדיל את המונה:

$$\{גדול < קטן\} \Rightarrow \frac{3}{5} < \frac{4}{5}$$

ב. להקטין את המכנה:

$$\{גדול < קטן\} \Rightarrow \frac{2}{7} < \frac{2}{5}$$

ג. לבצע במקביל גם וגם:

$$\{גדול < קטן\} \Rightarrow \frac{3}{8} < \frac{5}{6}$$

#### 2. הקטנת שבר

על מנת להקטין שבר נוכל: {מצד שמאל שבר מקורי. מימין שבר עליו "עבדנו"}

א. להקטין את המונה:

$$\{קטן > גדול\} \Rightarrow \frac{3}{5} > \frac{1}{5}$$

ב. להגדיל את המכנה:

$$\{קטן > גדול\} \Rightarrow \frac{2}{7} > \frac{2}{9}$$

ג. לבצע במקביל גם וגם:

$$\{קטן > גדול\} \Rightarrow \frac{3}{8} > \frac{2}{10}$$

#### 4. חיבור וחסור שברים

נושא זה חשוב מאוד על מנת להצליח לפתור תרגילים בקורס. הוא בסיס שחייבים לשלוט בו. הקו המנחה הוא להביא את השברים למכנה משותף. קיימים 3 סוגי תרגילים בפעולות חיבור וחסור שברים:

##### א. שברים עם אותו מכנה:

כאמור, המכנה הוא אותו מכנה ולכן מה שנוותר לנו לעשות הוא חיבור/חסור מונים לפי מה שנדרש מאתנו בתרגיל.

דוגמא:

$$\frac{3}{8} + \frac{4}{8} = \frac{3+4}{8} = \frac{7}{8}$$

עוד דוגמא:

$$\frac{4}{12} + \frac{5}{12} = \frac{4+5}{12} = \frac{9}{12}$$

##### ב. שברים שצריך למצוא להם מכנה משותף:

שוב, על מנת שניתן יהיה לחבר או לחסר שברים עלינו למצוא, קודם כל, מכנה שיהיה משותף להם. מוצאים אותו או על ידי הכפלת המכנה זה בזה (במצב זה המכנה שקיבלנו יהיה המכנה הגדול ביותר האפשרי) או, במקרה בו אחד המכנים הוא גורם של השני – ניקח את הגדול מבניהם להיות המכנה המשותף. לאחר שמצאנו מכנה משותף, נמשיך את הפתרון כמו שלמדנו בסעיף מספר 1.

דוגמא:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{6} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

עוד דוגמא:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{5}{15} + \frac{6}{15} = \frac{11}{15}$$

ג. חיבור וחסור מספרים מעורבים:

מספרים מעורבים הם מספרים הכוללים גם שלם וגם שבר. השיטה שנלמד כאן היא: הפיכת כל מספר לשבר פשוט, מציאת מכנה משותף, חיבור או חיסור לפי הצורך.

דוגמא:

$$2\frac{1}{4} + 3\frac{1}{2} = \frac{9}{4} + \frac{7}{2} = \frac{9}{4} + \frac{14}{4} = \frac{23}{4} = 5\frac{3}{4}$$

הסבר:

ניקח את  $2\frac{1}{4}$ . (שלם=2 ועוד חלק משלם הוא רבע במקרה הזה. "שתיים ורבע")  
המכנה הוא 4. נבנה את המונה כך: נכפיל את המכנה בשלם:  $4 \cdot 2 = 8$   
ונוסיף את המונה 1. כלומר  $8 + 1 = 9$ . כך הגענו ל-  $\frac{9}{4}$ .

הסבר נוסף:

ניקח את  $3\frac{1}{2}$ . (שלם=3 ועוד חלק משלם הוא חצי במקרה הזה. "שלוש וחצי")  
המכנה הוא 2. נבנה את המונה כך: נכפיל את המכנה בשלם:  $2 \cdot 3 = 6$   
ונוסיף את המונה 1. כלומר  $6 + 1 = 7$ . כך הגענו ל-  $\frac{7}{2}$ .

## 5. כפל שברים

על מנת לבצע כפל שברים - נכפיל מונה במונה ומכנה במכנה.

דוגמאות:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{4}{7} = \frac{4}{42}$$

$$\frac{3}{10} \cdot \frac{4}{7} = \frac{12}{70}$$

## 6. חילוק שברים

על מנת לחלק שבר בשבר, נכתוב את שני השברים עם קו שבר ביניהם ונפעל כך:

1. ניקח את המכנה של השבר התחתון, נעלה אותו למונה השבר העליון ונכפיל בו.
2. ניקח את מונה השבר התחתון, נעלה אותו למכנה השבר העליון ונכפיל בו.

דוגמא:

$$\frac{1}{2} \div \frac{3}{5} = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 3} = \frac{\text{מונה עליון כפול מכנה תחתון}}{\text{מכנה עליון כפול מונה תחתון}} = \frac{5}{6}$$

עוד דוגמא:

$$\frac{2}{5} \div \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 3} = \frac{\text{מונה עליון כפול מכנה תחתון}}{\text{מכנה עליון כפול מונה תחתון}} = \frac{8}{15}$$

## שברים – תרגול

### 1. צמצום/הרחבת שבר:

#### א. הרחבת שברים:

לפניך מספר שברים.

בצע לכל שבר שלוש הרחבות שונות.

דוגמא:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$$

עכשיו אתם:

$\frac{3}{5}$	,	$\frac{4}{6}$	,	$\frac{7}{y}$	,	$\frac{x}{9}$
$\frac{2+x}{18}$	,	$\frac{4}{2+y}$	,	$\frac{x+y}{2+x}$	,	$\frac{2y+3}{4+6x}$

#### ב. צמצום שברים:

לפניך מספר שברים.

ע"י ביצוע מספר צמצומים – הגיעו לשבר המצומצם ביותר.

אל "תקפצו" ישר לשבר הכי מצומצם. כתבו כמה שברים "שקולים" בדרך.

דוגמא:

$$\frac{20}{40} = \frac{10}{20} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

עכשיו אתם:

$\frac{12}{24}$	,	$\frac{18}{30}$	,	$\frac{28}{8y}$	,	$\frac{10x}{90}$
$\frac{12+6x}{108}$	,	$\frac{32}{16+8y}$	,	$\frac{10x+20y}{30+10x}$	,	$\frac{12y+18}{48+72x}$

**2. חיבור/חיסור שברים:**

פתור את התרגילים הבאים:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4}, \quad \frac{2}{3} - \frac{4}{9}, \quad \frac{2}{6} + \frac{3}{5}, \quad \frac{4}{7} - \frac{4}{10}$$

$$\frac{12+6x}{72} - \frac{x}{12}, \quad \frac{x+2}{81} + \frac{y}{2}, \quad \frac{10x+20y}{8+10x} - \frac{2x-3}{4}, \quad \frac{12y+18}{48+72x} + \frac{12}{24}$$

**3. כפל שברים:**

פתור את התרגילים הבאים:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}, \quad \frac{4}{7} \cdot \frac{8}{9}, \quad \frac{x+2}{3} \cdot \frac{5}{y}$$

$$\frac{x^2+y}{2+2y} \cdot \frac{3x}{4}, \quad \frac{x \cdot (x+6)}{y} \cdot \frac{3}{x}, \quad \frac{7}{y^2+5} \cdot \frac{5y}{x}$$

**4. חילוק שברים:**

פתור את התרגילים הבאים:

$$\frac{1}{2} \div \frac{3}{5}, \quad \frac{4}{7} \div \frac{8}{9}, \quad \frac{x+2}{3} \div \frac{5}{y}$$

$$\frac{x^2+y}{2+2y} \div \frac{3x}{4}, \quad \frac{x \cdot (x+6)}{y} \div \frac{3}{x}, \quad \frac{7}{y^2+5} \div \frac{5y}{x}$$

שברים – פתרונות

1. צמצום/הרחבת שבר:

א. הרחבת שברים:

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{12}{20} = \frac{24}{40}$$

$$\frac{4}{6} = \frac{8}{12} = \frac{16}{24} = \frac{32}{48}$$

$$\frac{7}{y} = \frac{14}{2y} = \frac{28}{4y} = \frac{56}{8y}$$

$$\frac{x}{9} = \frac{2x}{18} = \frac{4x}{36} = \frac{8x}{72}$$

$$\frac{2+x}{18} = \frac{4+2x}{36} = \frac{8+4x}{72} = \frac{16+8x}{144}$$

$$\frac{4}{2+y} = \frac{8}{4+2y} = \frac{16}{8+4y} = \frac{32}{16+8y}$$

$$\frac{x+y}{2+x} = \frac{2x+2y}{4+2x} = \frac{4x+4y}{8+4x} = \frac{8x+8y}{16+8x}$$

$$\frac{2y+3}{4+6x} = \frac{4y+6}{8+12x} = \frac{8y+12}{16+24x} = \frac{16y+24}{32+48x}$$

ב. צמצום שברים:

$$\frac{12}{24} = \frac{6}{12} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{18}{30} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{28}{8y} = \frac{14}{4y} = \frac{7}{2y}$$

$$\frac{10x}{90} = \frac{5x}{45} = \frac{x}{9}$$

$$\frac{12+6x}{108} = \frac{6+3x}{54} = \frac{2+x}{18}$$

$$\frac{32}{16+8y} = \frac{8}{4+2y} = \frac{4}{2+y}$$

$$\frac{10x+20y}{30+10x} = \frac{2x+4y}{6+2x} = \frac{x+2y}{3+x}$$

$$\frac{12y+18}{48+72x} = \frac{4y+6}{16+24x} = \frac{2y+3}{8+12x}$$



**2. חיבור/חיסור שברים:**

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{2+3}{4} = \frac{5}{4} \quad , \quad \frac{2}{3} - \frac{4}{9} = \frac{6}{9} - \frac{4}{9} = \frac{6-4}{9} = \frac{2}{9}$$

$$\frac{2}{6} + \frac{3}{5} = \frac{10}{30} + \frac{18}{30} = \frac{28}{30} = \frac{14}{15} \quad , \quad \frac{4}{7} - \frac{4}{10} = \frac{40}{70} - \frac{28}{70} = \frac{12}{70} = \frac{6}{35}$$

$$\frac{12+6x}{72} - \frac{x}{12} = \frac{12+6x}{72} - \frac{6x}{72} = \frac{12+6x-6x}{72} = \frac{12}{72} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{x+2}{81} + \frac{y}{2} = \frac{2x+4}{162} + \frac{81y}{162} = \frac{2x+4+81y}{162}$$

$$\frac{10x+20y}{8+10x} - \frac{2x-3}{4} = \frac{4 \cdot (10x+20y)}{4 \cdot (8+10x)} - \frac{(8+10x) \cdot (2x-3)}{4 \cdot (8+10x)} =$$

$$\frac{(40x+80y) - (16x-24+20x^2-30x)}{4 \cdot (8+10x)} = \frac{54x+80y+24-20x^2}{32+40x}$$

$$\frac{12y+18}{48+72x} + \frac{12}{24} = \frac{(12y+18)+12 \cdot (2+3x)}{24 \cdot (2+3x)} = \frac{12y+42+36x}{48+72x}$$

**3. כפל שברים:**

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 5} = \frac{3}{10} \quad , \quad \frac{4}{7} \cdot \frac{8}{9} = \frac{4 \cdot 8}{7 \cdot 9} = \frac{32}{63} \quad , \quad \frac{x+2}{3} \cdot \frac{5}{y} = \frac{5 \cdot (x+2)}{3 \cdot y} = \frac{5x+10}{3y}$$

$$\frac{x^2+y}{2+2y} \cdot \frac{3x}{4} = \frac{3x \cdot (x^2+y)}{4 \cdot (2+2y)} = \frac{3x^3+3xy}{8+8y} \quad , \quad \frac{x \cdot (x+6)}{y} \cdot \frac{3}{x} = \frac{3x \cdot (x+6)}{x \cdot y} = \frac{3x^2+18x}{xy}$$

$$\frac{7}{y^2+5} \cdot \frac{5y}{x} = \frac{7 \cdot 5y}{(y^2+5) \cdot x} = \frac{35y}{xy^2+5x}$$

4. חילוק שברים:

$$\frac{1}{2} : \frac{3}{5} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}} = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 3} = \frac{5}{6} \quad , \quad \frac{4}{7} : \frac{8}{9} = \frac{\frac{4}{7}}{\frac{8}{9}} = \frac{4 \cdot 9}{7 \cdot 8} = \frac{36}{56} \quad ,$$

$$\frac{x+2}{3} : \frac{5}{y} = \frac{\frac{x+2}{3}}{\frac{5}{y}} = \frac{y \cdot (x+2)}{3 \cdot 5} = \frac{yx+2y}{15} \quad ,$$

$$\frac{x^2+y}{2+2y} : \frac{3x}{4} = \frac{\frac{x^2+y}{2+2y}}{\frac{3x}{4}} = \frac{(x^2+y) \cdot 4}{(2+2y) \cdot (3x)} = \frac{4x^2+4y}{6x+6xy} \quad ,$$

$$\frac{x \cdot (x+6)}{y} : \frac{3}{x} = \frac{\frac{x \cdot (x+6)}{y}}{\frac{3}{x}} = \frac{x \cdot (x \cdot (x+6))}{3y} = \frac{x^3+6x^2}{3y} \quad ,$$

$$\frac{7}{y^2+5} : \frac{5y}{x} = \frac{\frac{7}{y^2+5}}{\frac{5y}{x}} = \frac{7 \cdot x}{(y^2+5) \cdot 5y} = \frac{7x}{5y^3+25y}$$

עד כאן נושא שברים – הסברים + תרגול