<u>אחוזים (ללא לוגים) – גידול דעיכה</u>

כאשר נתון לנו תהליך שגדל או קטן באופן קבוע ולאורך זמן, לדוגמא: ריבוי אוכלוסייה, חסכון בבנק, פחת של מכונית וכו׳, <u>ניתן לתאר אותו ע״י פונקציית הגידול/הדעיכה הבאה:</u>

$$\boldsymbol{f(t) = K \cdot (1 \pm \frac{r}{100})^t}$$

<u>הסבר על רכיבי הפונקציה:</u>

K – הסכום/הערך ההתחלתי, בזמן t=0.

r – אחוז הגדילה/הדעיכה פר יחידת זמן.

t – מספר יחידות הזמן (שנים/חודשים/ימים/שעות) שעברו.

$f(t)$- הסכום/הערך המתקבל לאחר t זמן.

אחוז הריבית ליחידת זמן.
לדוגמא: ריבית שנתית, ריבית חודשית.

מונה את יחידת הזמן.

אם השאלה עוסקת ביחידת זמן של שנים, אז לדוג׳: t=5 , זה אומר 5 שנים.
ואום שאלה עוסקת ביחידת זמן של חצי שעה.
אז לדוג׳: t=2, זה אומר שעה.

סכום הקרן

$$\boldsymbol{K \cdot (1 \pm \frac{r}{100})^t}$$

כאשר מדובר בגדילה, נשתמש בסימן ה״+״, וכאשר מדובר בדעיכה (הקטנה), נשתמש בסימן ה״-״.

<u>שימו לב: חלק מהמרצים משתמשים בנוסחה עם משתנים אחרים. לדוג׳:</u> $\boldsymbol{f(t) = A \cdot (1 \pm \frac{x}{100})^t}$.

<u>כמובן, שהנוסחה אותו דבר בדיוק!</u>

נעבור לדוגמאות ע״מ ליישב היטב את המושגים הנ״ל.

דוגמא :

הכנסנו לקופת חיסכון סכום של A שקלים.

נאמר לנו על ידי פקיד הבנק שהקופה צוברת 4% תשואה בשנה אחת.
אנחנו רוצים לדעת מה הסכום שיצטבר בקופה **לאחר שנה אחת**. (כמה כסף יהיה לנו?)
נציב נתונים :

$$f(t)=K\cdot\left(1+\frac{4}{100}\right)^{1}=1.04K$$

וכמה אחרי שנתיים?

$$f(t)=K\cdot\left(1+\frac{4}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{4}{100}\right)=1.0816K$$

ואחרי 3 שנים?

$$f(t)=K\cdot\left(1+\frac{4}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{4}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{4}{100}\right)=1.124K$$

עכשיו בכתיבה מקוצרת :

$$f(t)=K\cdot\left(1+\frac{4}{100}\right)^{3}=1.124K$$

דוגמא נוספת :

מחיר יצירת אומנות הוא 20,000 ש״ח. הערך של היצירה עולה כל שנה באחוז קבוע של 50%.
מה יהיה מחיר היצירה כעבור 4 שנים?

נציב בנוסחה את הנתונים הידועים לנו ונפתור :

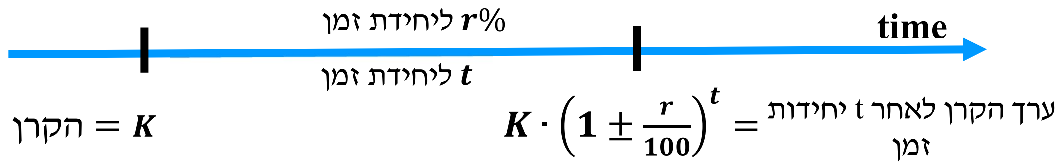
$$f(t)=K\cdot\left(1\pm\frac{r}{100}\right)^{t}=20{,}000\cdot\left(1+\frac{50}{100}\right)^{4}=20{,}000\cdot1.5^{4}=101{,}250$$

כעבור 4 שנים, מחיר יצירת האומנות יהיה שווה ל101,250 ₪.

משפט ציר הזמן:

משפט זה משתמש בנוסחה שלמדנו לעיל על ציר הזמן!

בהינתן קרן K וריבית של r% ליחידת זמן, לאחר t יחידות זמן אנו שווים $K\cdot(1\pm\frac{r}{100})^t$

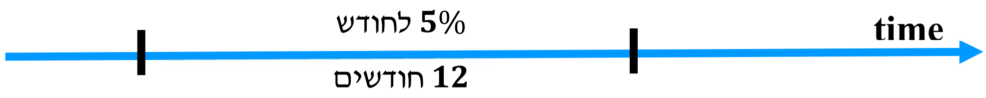


דוגמא:

יש ברשותי תוכנית חיסכון של A שקלים.
האם ריבית **חודשית** של 5% שקולה בדיוק לריבית **שנתית** של 60% (12*5)?

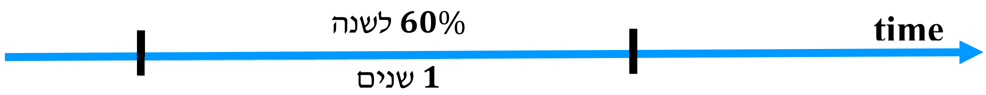
נבדוק כל אחת מהאופציות:

1. ריבית חודשית של 5%:



$$K\cdot\left(1\pm\frac{r}{100}\right)^t = K\cdot\left(1\pm\frac{5}{100}\right)^{12} = K(1.05)^{12} = 1.8K$$

2. ריבית שנתית של 60%:



$$K\cdot\left(1\pm\frac{r}{100}\right)^t = K\cdot\left(1\pm\frac{60}{100}\right)^{1} = K(1.6)^{1} = 1.6K$$

קיבלנו, שריבית חודשית של 5% נותנת לנו תוצאה מספקת יותר מאשר פעם אחת ריבית שנתית של 60% .

ריבית ממוצעת

נתחיל ישירות בתרגיל...

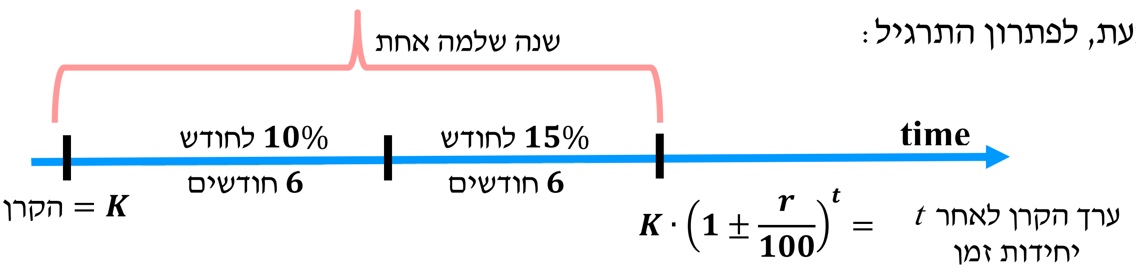
מנייה יורדת ב10% בחודש במחצית השנה הראשונה.
לאחר מכן, במחצית השנה השנייה, המנייה עולה ב15% בחודש.

מה הריבית החודשית הממוצעת?

ובעברית: אם בהתחלה המנייה יורדת ב 10% ואח"כ 15%... אז בכמה אחוז קבוע זה יוצא בממוצע כל חודש?
לדוגמא: אם במשך חצי שנה רצתי 2 קילומטר ליום, ובמשך חצי השנה השנייה רצתי 4 קילומטר ביום, אז אפשר לומר שכל חודש רצתי בממוצע 3 קילומטר ליום.

נסכם: הריבית החודשית הממוצעת היא בעצם אותה ריבית שצריכה להיות קבועה (!) (לא משתנה, פעם 10% ופעם 15%) במשך שנה, כדי שבסיום התהליך נקבל בדיוק אותה תוצאה כספית.

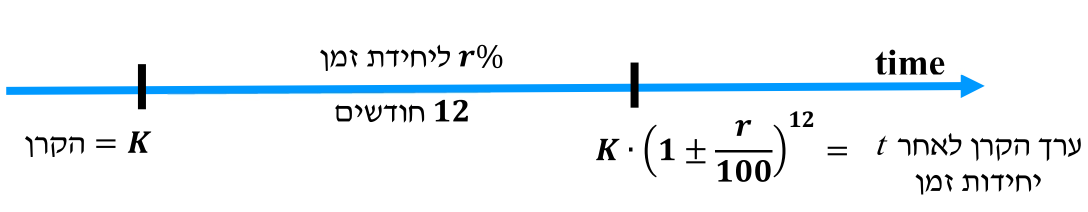
וכעת, לפתרון התרגיל:



$$K\cdot\left(1\pm\frac{r}{100}\right)^t = K\cdot\left(1-\frac{10}{100}\right)^6\cdot\left(1+\frac{15}{100}\right)^6 = K\cdot(0.9)^6\cdot(1.15)^6 =$$

זהו ערך המנייה בסיום השנה $K\cdot(1.035)^6$

עכשיו, נניח כי יש לנו r% לחודש קבועה לכל השנה. כלומר ציר הזמן ייראה כך:



המשך...

אנחנו רוצים לקבל את אותה תוצאה כספית שיצאה לנו בחישוב הקודם $(1.035)^6 K$
לכן, נשווה את הביטויים! כי הם מייצגים את אותו סכום כסף בדיוק לאחר שנה.

$$K \cdot \left(1 \pm \frac{r\%}{100}\right)^{12} = (1.035)^6 K$$

$$\left(1 \pm \frac{r\%}{100}\right)^{12} = (1.035)^6 =$$ נעלה את שני האגפים בחזקה של 1/12

$$\left(1 \pm \frac{r\%}{100}\right) = ((1.035)^6)^{\frac{1}{12}} =$$

$$\left(1 \pm \frac{r\%}{100}\right) = (1.035)^{0.5} =$$ חזקה של חצי שווה לשורש

$$\left(1 \pm \frac{r\%}{100}\right) = \sqrt{(1.035)} =$$

$$\frac{r\%}{100} = \left(\sqrt{(1.035)} - 1\right) =$$

$$r\% = \left(\sqrt{(1.035)} - 1\right) \cdot 100 =$$

$$r\% = 1.735\%$$

תשובה מילולית:

מנייה שיורדת ב10% במשך חצי שנה ואז עולה ב15% במשך חצי שנה, זה **בדיוק בדיוק בדיוק**

שווה למנייה שעולה בכל חודש ב1.735%

עד כאן גידול ודעיכה