

פרבולה - פונקציה ריבועית

פרבולה היא פונקציה שהמשוואה שלה היא משוואה ריבועית. (כלומר, יש לה שני פתרונות).

הנוסחה של הפרבולה היא:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

לדוגמא: $f(x) = x^2 - 6x + 5$

הסבר על a, b, c :

הפרמטרים a, b, c הם אלה שאחראים על צורת הגרף. כל פרמטר, לבד או יחד עם פרמטר אחר, אחראי על תכונה/מאפיין אחר.

נסביר כל אחד בפרוטרוט:

a – המקדם של x^2 .

אם $a > 0$ אז הפרבולה – "מחייכת" \cup .

אם $a < 0$ אז הפרבולה – "בוכה" \cap .

a אינו יכול להיות המספר 0.

כי אם $a = 0$ המשוואה כבר לא תהיה פרבולה, אלא משוואת ישר.

b – המקדם של x . (הוא לא תמיד קיים, כלומר ערכו יכול להיות גם אפס). משפיע על שיעורי נקודת הקיצון (הקודקוד). נסביר בהמשך....

c – מספר חופשי. (הוא לא תמיד קיים, כלומר ערכו יכול להיות גם אפס). הוא הגובה בו הגרף חותך את ציר y .

במילים אחרות, נקודת החיתוך עם ציר y תהיה $(0, c)$.

מציאת הנקודה c :

נציב $x = 0$ בפונקציה. המספר שנקבל כתוצאה הוא הערך של c .

גרף הפרבולה

גרף הפרבולה נראה כך:



לגרף הפונקציה יש נקודת קודקוד (מסומן באדום). כאשר הפרבולה מחייכת, נקודת הקודקוד נמצאת "הכי למטה" והפרבולה תיקרא **פרבולת מינימום**. (כמו בגרף שלעיל).



לעומת זאת, פרבולה זו היא **פרבולת מקסימום**. נקודת הקודקוד היא הגבוהה ביותר בפרבולה.

מציאת נקודות חיתוך של הפרבולה עם ציר X:

ידוע לנו עוד מהתיכון, אם נקודה נמצאת על ציר איקס, הרי שערך ה y שלה הוא 0. לכן, על מנת למצוא נקודות חיתוך של הפרבולה עם ציר x , נציב $y=0$ במשוואת הפרבולה.

$$f(x) = x^2 - 6x + 5 \text{ לדוגמא:}$$

נציב $y=0$

$$0 = x^2 - 6x + 5$$

ע"מ לפתור משוואה כזו (ריבועית), נשתמש בנוסחת השורשים:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

נחלץ את a, b, c ממשוואת הפרבולה ונציב בנוסחת השורשים. (אם B או C שווים ל 0 יש דרכים נוספות לפתור. אבל, נוסחת השורשים נותנת מענה לכל המקרים)

$$a = 1, b = -6, c = 5$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 * 1 * 5}}{2 * 1} =$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{+6 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$x_1 = \frac{6 + 4}{2} = 5, \quad x_2 = \frac{6 - 4}{2} = 1$$

למשוואה זו יש שני פתרונות: $x_1 = 5, x_2 = 1$

נקודות החיתוך של הפרבולה עם ציר האיקס הן: $(5, 0), (1, 0)$.

ישנם משוואות ריבועיות שיש להם פתרון אחד או שאין להם פתרון כלל. איך נדע? הכל תלוי במה שקורה מתחת לשורש בנוסחת השורשים.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- אם הביטוי $b^2 - 4ac$ שלילי, נוכל להפסיק מיד לפתור ולומר שאין פתרון למשוואה, שהרי הביטוי הנ"ל נמצא בתוך שורש, ואין פתרון לשורש שלילי.
- אם הביטוי $b^2 - 4ac$ שווה לאפס, גם בתוך השורש הוא ייתן 0. שהרי, $\sqrt{0} = 0$. לכן, x_1 וגם x_2 יובילו לאותה התוצאה ונאמר שיש פתרון אחד למשוואה.

לדוגמא, נציב את המשוואה $0 = x^2 - 2x + 5$ בנוסחת השורשים:

$$x_{1,2} = \frac{+2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 * 1 * 5}}{2 * 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

קיבלנו שהביטוי מתחת לשורש שלילי, נאמר מייד כי למשוואה זו אין פתרון!

דוגמא נוספת, נציב את המשוואה $0 = x^2 - 6x + 9$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 * 1 * 9}}{2 * 1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{0}}{2} =$$

קיבלנו שהביטוי מתחת לשורש שווה לאפס, לכן לא נצטרך לפצל את המשוואה ל x_1 ו x_2 כי נקבל את אותה התוצאה. נמשיך לפתור ונראה:

$$x_1 = \frac{6 + 0}{2} = 3, \quad x_2 = \frac{6 - 0}{2} = 3$$

קיבלנו פתרון יחיד למשוואה והוא $x = 3$.

מציאת נקודות חיתוך של הפרבולה עם ציר y:

נציב במשוואת הפרבולה $x=0$.

$$\text{לדוגמא: } y = x^2 - 6x + 5$$

$$y = 0^2 - 6 * 0 + 5$$

$$y = 5$$

נקודת החיתוך היא: $(0, 5)$.

קודקוד הפרבולה

למדנו קודם מי היא נקודת הקודקוד של הפרבולה. כעת נלמד, איך מוצאים אותה.

שימו לב: לנקודה יש ערך x ויש ערך y (x, y) . לכן כשמבקשים למצוא נקודה נצטרך למצוא את x ו y .

מציאת ערך ה X של קודקוד הפרבולה

נשתמש בנוסחה

$$x_{\text{קודקוד}} = -\frac{b}{2a}$$

מציאת ערך ה Y של קודקוד הפרבולה

נציב את $x_{\text{קודקוד}}$ שיצא לנו במשוואת הפרבולה וכך נקבל את $y_{\text{קודקוד}}$.

$$\text{לדוגמא: } y = x^2 - 6x + 5$$

נמצא את $x_{\text{קודקוד}}$

$$x_{\text{קודקוד}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-6)}{2 * 1} = \frac{6}{2} = 3$$

כעת, נציב במשוואת הפרבולה $x = 3$:

$$y = x^2 - 6x + 5$$

$$y = 3^2 - 6 * 3 + 5 = -4$$

נקודת הקודקוד של הפרבולה: $(3, -4)$.

נדגיש שוב:

נקודת הקודקוד היא הנקודה הכי "קיצונית" בגרף הפרבולה.

כאשר הפרבולה "מחייכת" כלומר, כאשר a חיובי, אזי נקודת הקודקוד היא הנמוכה ביותר בגרף.
 כאשר הפרבולה "בוכה" כלומר, כאשר a שלילי, אזי נקודת הקודקוד היא הגבוהה ביותר בגרף.

ציר הסימטריה:

"ציר הסימטריה" הוא ישר המקביל לציר ה־ Y שמשני צדדיו הפרבולה היא סימטרית.

ובלשון העם, ציר הסימטריה של הפרבולה הוא ערך ה־ x של קודקוד הפרבולה. (תמיד!)

לדוגמא: אם קודקוד הפרבולה הוא $(2, 7)$ אזי ציר הסימטריה הוא $x = 2$

כיצד נמצא את ציר הסימטריה? פשוט נמצא את ערך ה־ X של קודקוד הפרבולה (!).
איך?

1. בעזרת הנוסחה שלמדנו קודם:

$$x_{\text{קודקוד}} = -\frac{b}{2a}$$

לדוגמא, ע"מ לחשב את ציר הסימטריה של הפרבולה: $y = x^2 + 2x + 1$

$$x_{\text{קודקוד}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 * 1} = \frac{2}{2} = 1$$

ציר הסימטריה של הפרבולה הוא $x = 1$.

2. בעזרת שתי נקודות סימטריות על הפרבולה.

נקודות סימטריות = נקודות שערך ה־ Y שלהן שווה.

לדוגמא: הנקודות $(1, 9)$, $(5, 9)$ סימטריות. בשתיהן ערך ה־ Y הוא 9.

כדי לחשב את ה־ X של קודקוד הפרבולה בעזרת שתי הנקודות נשתמש בנוסחה הבאה:

$$x_k = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

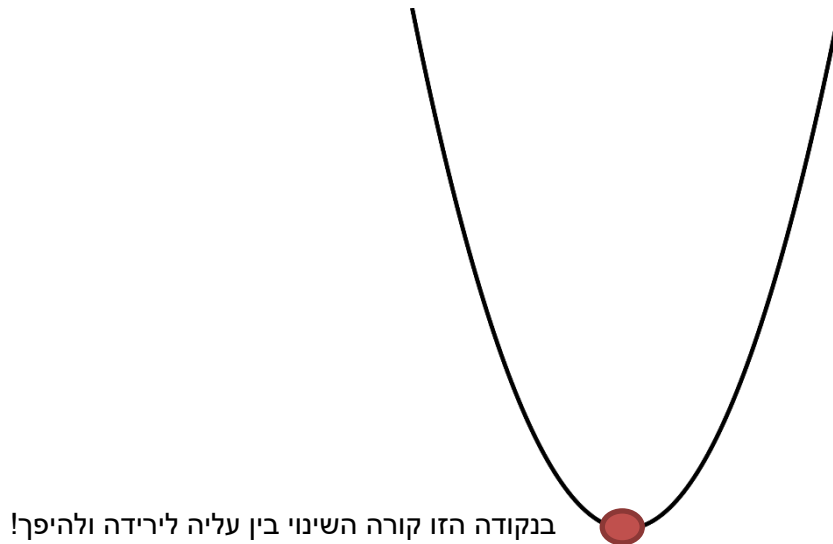
לדוג': עבור הנקודות $(1, 9)$, $(5, 9)$ הנמצאות על פרבולה, ציר הסימטריה של הפרבולה יהיה:

$$x_k = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{5 + 1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

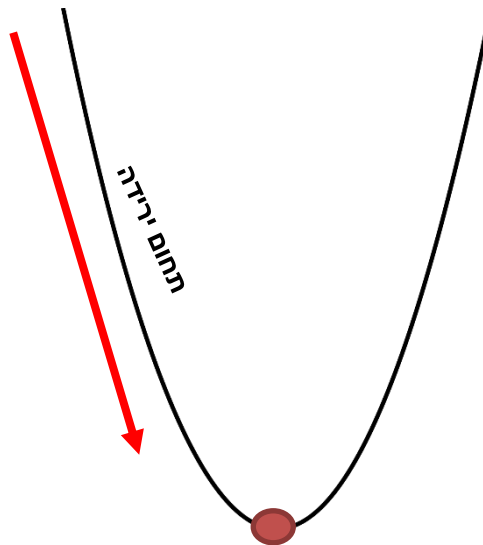
$x = 3$

תחומי עליה וירידה

בפרבולה, יש תחום בו הפרבולה עולה ותחום בו הפרבולה יורדת.
תחום העלייה או הירידה מתחלף בנקודת הקודקוד וזה קורה, פעם אחת בלבד!

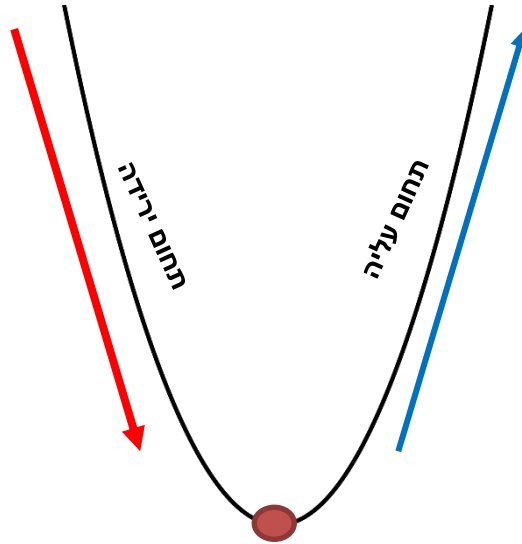


כדי לזהות עלייה/ירידה של הפרבולה, נסתכל על גרף הפרבולה משמאל לימין
ונבדוק: מה צריך לעשות כדי להגיע לנקודת הקודקוד? לעלות או לרדת?

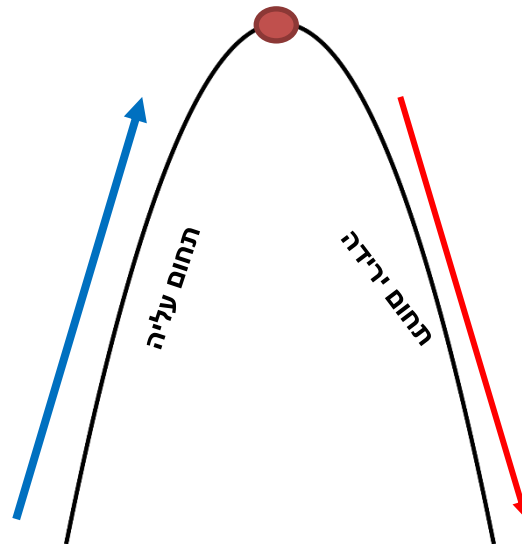


במקרה הזה, היינו צריכים לרדת. לכן, זהו תחום ירידה של הפרבולה.

כעת, אנו נמצאים בנקודת הקודקוד. האופציה היחידה שיש היא: **לעלות**.
ולכן, תחום זה יהיה תחום העלייה של הפרבולה.



בפרבולה "בוכה" (פרבולת מקסימום), תחומי העלייה והירידה יראו כך:



לאחר שהבנו בצורה ויזואלית תחומי עליה וירידה בגרף הפרבולה, נלמד כיצד למצוא במדויק את תחומי העלייה הירידה:

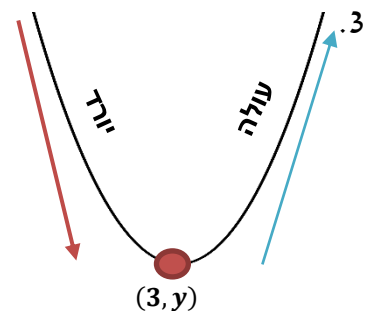
1. נבדוק אם הפרבולה היא מינימום (מחייכת) או מקסימום (בוכה) לפי ערך ה a במשוואת הפרבולה.
2. נמצא את ערך איקס של קודקוד הפרבולה ע"פ הנוסחה שלמדנו. (ה Y לא מעניין)
3. נשרטט מעין סקיצה של הפרבולה שלנו. (אם בשאלה קיבלנו סקיצה, אז לא נצטרך לשרטט)
4. נכתוב את תחומי העלייה והירידה בכתב מתמטי.

דוגמא: מצאו את התחומי העלייה והירידה של הפרבולה:

$$y = x^2 - 6x + 5$$

1. הפרבולה היא פרבולת מינימום, כלומר מחייכת. כיוון ש a , המקדם של x^2 , חיובי
2. נמצא את ערך איקס של קודקוד הפרבולה:

$$x_{\text{קודקוד}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-6)}{2 * 1} = \frac{6}{2} = 3$$



4. משמאל לנקודת הקודקוד, הפרבולה יורדת. לכן נאמר כי תחום הירידה הוא: כל המספרים שקטנים מערך האיקס של קודקוד הפרבולה, כלומר קטנים מ-3. ובכתב מתמטי: **תחום הירידה הוא $x < 3$** .
- מימין לנקודת הקודקוד, הפרבולה עולה. לכן נאמר כי תחום העלייה הוא: כל המספרים שגדולים מערך האיקס של קודקוד הפרבולה, כלומר גדולים מ-3. ובכתב מתמטי: **תחום העלייה הוא $x > 3$** .

תחומי חיוביות ושליליות של הפרבולה

הכלל אומר שפרבולה היא חיובית כאשר היא נמצאת מעל ציר איקס.

וכמו"כ, פרבולה היא שלילית כאשר היא נמצאת מתחת ציר איקס.

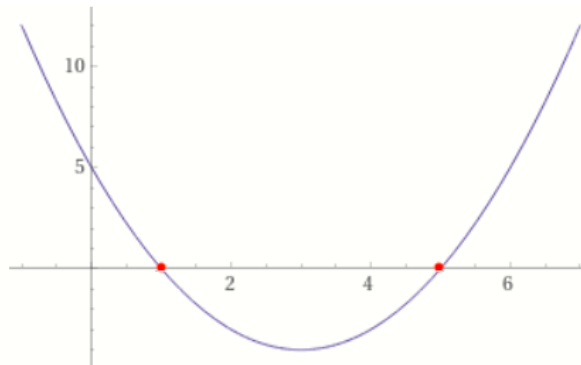
כדי לדעת את תחומי החיוביות והשליליות של פרבולה:

1. נמצא את נקודות החיתוך של הפרבולה עם ציר X (למדנו קודם איך מוצאים), ונסמן על הציר.
2. נבדוק אם הפרבולה היא מינימום (מחייכת) או מקסימום (בוכה) לפי ערך ה a במשוואת הפרבולה.
3. נשרטט מעין סקיצה של הפרבולה על הצירים. הכוללת: נקודות חיתוך עם ציר איקס, ופרבולה מחייכת/בוכה.
4. נכתוב את תחומי החיוביות והשליליות ע"פ השרטוט.

דוגמא: מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפרבולה:

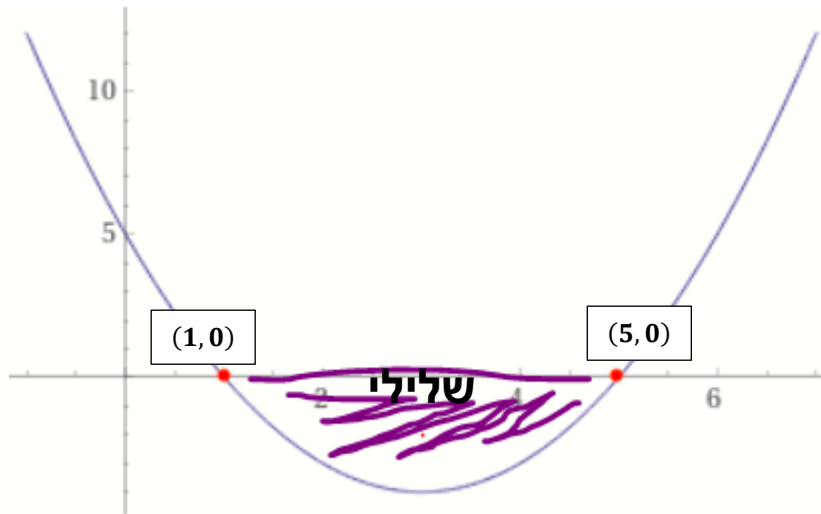
$$y = x^2 - 6x + 5$$

1. מציאת נקודות חיתוך עם ציר איקס ע"י הצבת $y=0$ ופתירת משוואה ריבועית לפי נוסחת השורשים. (למדנו קודם איך עושים זאת, לכן אכתוב רק תשובה סופית)
נקודות החיתוך עם ציר האיקס הם: $(1, 0)$, $(5, 0)$.
2. הפרבולה היא פרבולת מינימום, כלומר מחייכת. כיוון ש a , המקדם של x^2 , חיובי.
3. הסקיצה:



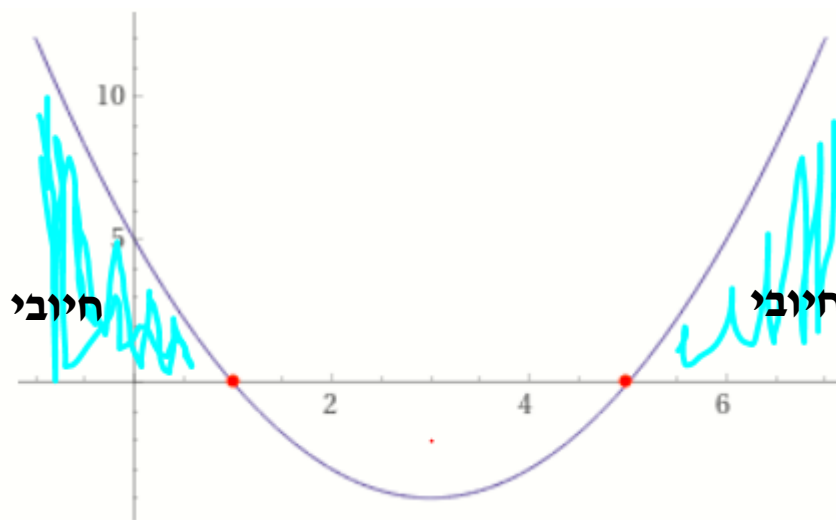
(נקודות החיתוך עם ציר איקס מסומנות באדום)

.4



החלק המסומן הוא החלק שמתחת ציר איקס. כלומר, זה התחום בו הפרבולה שלילית! לכן, תחום השליליות הוא: כל המספרים שגדולים מ-1 וגם כל המספרים שקטנים מ-5.

ובכתיב מתמטי: **תחום השליליות של הפרבולה: $1 < x < 5$**



החלקים המסומנים, הם מעל ציר איקס. כלומר, אלו התחומים בהם הפרבולה חיובית! שימו לב: הפעם, ישנם שני תחומים בהם הפרבולה חיובית. לכן יהיו שתי תשובות! תחומי החיוביות הוא: כל המספרים שקטנים מ-1 או כל המספרים שגדולים מ-5.

ובכתיב מתמטי: **תחומי החיוביות של הפרבולה: $x < 1$ או $x > 5$** .

שרטוט גרף הפרבולה

כדי לשרטט את גרף הפרבולה אנחנו חייבים לדעת:

1. האם הפרבולה היא מינימום או מקסימום. (לפי a – המקדם של x^2 במשוואת הפרבולה).
2. נקודות חיתוך עם ציר איקס. (למדנו קודם איך מוצאים).
3. נקודת הקודקוד של הפרבולה. (למדנו קודם איך מוצאים).

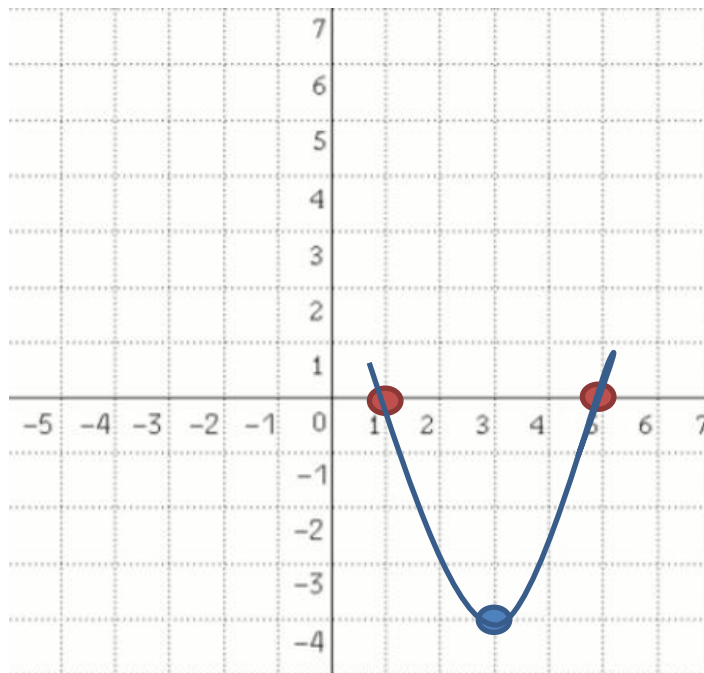
ניגש לשרטוט...

ניקח משוואה לדוגמא כדי להבין טוב יותר איך השרטוט עובד.

שרטטו את גרף הפרבולה של המשוואה:

$$y = x^2 - 6x + 5$$

1. נציב את נקודות החיתוך שמצאנו עם ציר האיקס במערכת הצירים. בדוגמא שלנו, נקודות החיתוך הם: $(1, 0)$, $(5, 0)$. (מסומן באדום בשרטוט)
2. נציב את נקודת הקודקוד של הפרבולה גם במערכת הצירים. בדוגמא שלנו, נקודת הקודקוד היא: $(3, -4)$ (מסומן בכחול בשרטוט).
3. נשרטט פרבולה מחייכת (כיוון a חיובי) שעוברת בין שלושת הנקודות.



עד כאן משוואה ריבועית